● هوشنگ شرقی

مسئله چنین است: دو عدد طبیعی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است؟

اگر قبل از مطالعه‌ی مقاله‌ی حاضر، کمی به این مسئله فکر کرده باشید، حتماً متوجه پیچیدگی بسیار آن شده‌اید. پاسخ به این مسئله، به طرح و پاسخ به ده‌ها مسئله‌ی دیگر منجر می‌شود. در این مقاله می‌خواهیم همه‌ی این پرسش‌ها را مطرح کنیم و به آن‌ها نیز پاسخ دهیم.

مسئله‌ای چالش برانگیز از احتمال!

قدم اول: آشنایی با مسئله

برای آن‌که با موضوع آشنا شویم، ابتدا مسئله را در حالت‌های ساده‌تر بررسی و حل می‌کنیم.

مسئله‌ی ۱. دو عدد طبیعی یک رقمی را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اول بودن این دو عدد نسبت به هم را به دست آورید.

حل: بدیهی است، چون ۹ عدد یک رقمی داریم، فضای نمونه‌ی این پیشامد شامل ۸۱ زوج مرتب از عددهای طبیعی یک رقمی است. یعنی: $n(s)=۹\times۹=۸۱$ و پیشامد مطلوب، یعنی جفت عددهایی که نسبت به هم اول‌اند نیز به سادگی قابل شمارش است. عدد ۱ نسبت به همه‌ی عددها اول است. عدد ۲ نسبت به ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ اول است و عدد ۳ نسبت به ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸ اول است. به همین ترتیب، می‌توانیم تمام این‌گونه زوج‌ها را بشماریم و در نتیجه:

$$n(A)=۵۶ \quad \text{و} \quad P(A)=\frac{۵۶}{۸۱}$$

مسئله‌ی ۲. دو عدد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را به ترتیب و به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه قدر است؟

حل: شبیه مسئله‌ی ۱، $n(S)=۲۰^۲=۴۰۰$. ولی برای محاسبه‌ی $n(A)$ چه باید کرد؟ آیا می‌توان مانند همان مسئله

عمل کرد؟ شاید آری، ولی مسلماً کار خیلی طولانی‌تری در پیش داریم. آیا با اتکا به آنالیز ترکیبی، روش کوتاه‌تری وجود ندارد؟

پاسخ مثبت است. در واقع بهتر است از متمم این مجموعه استفاده کنیم؛ یعنی زوج‌های مرتب نامطلوب را بیابیم و از تعداد کل آن‌ها (یعنی ۴۰۰) کم کنیم.

زوج‌های نامطلوب آن‌هایی هستند که نسبت به هم اول نیستند. یعنی هر دو بر یک عدد اول بخش‌پذیرند. عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ عددهای اول کمتر یا مساوی ۲۰ هستند. بنابراین، دو عددی نسبت به هم اول نیستند که یا هر دو بر ۲، یا هر دو بر ۳ و... و یا هر دو بر ۱۹ بخش‌پذیر باشند. اگر مجموعه زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۲ بخش‌پذیرند، A_1 و مجموع زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۳ بخش‌پذیرند، A_2 و... و مجموعه زوج‌های مرتبی را که هر دو بر ۱۹ بخش‌پذیرند، A_8 بنامیم، آن‌چه می‌خواهیم، $n(A_1\bigcup A_2\bigcup ...\bigcup A_8)$ است.

برای محاسبه‌ی این مقدار، به دو موضوع توجه می‌کنیم: ابتدا «اصل شمول ـ عدم شمول» که برای آگاهی از آن می‌توانید به انواع کتاب‌های ریاضیات گسسته رجوع کنید، دیگر آن‌که تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی عدد طبیعی a که بر k بخش‌پذیرند، برابر است با $\left[\frac{a}{k}\right]$ (جزء صحیح عدد $\frac{a}{k}$). بنابراین تعداد زوج‌های مرتب از عددهای صحیح کوچک‌تر یا مساوی a که هر دو بر k بخش‌پذیر باشند، مساوی $\left[\frac{a}{k}\right]^2$ است. با توجه به این دو موضوع خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&n(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k)=n(A_1)+n(A_2)+...+n(A_8)\\
&-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-...-n(A_7\cap A_8)\\
&+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+...+n(A_6\cap A_7\cap A_8)-...\\
&-n(A_1\cap A_2\cap A_3\cap ...A_8)=\left[\frac{20}{2}\right]^2+\left[\frac{20}{3}\right]^2+...+\left[\frac{20}{19}\right]^2\\
&-\left[\frac{20}{2\times 3}\right]^2-\left[\frac{20}{2\times 5}\right]^2-\left[\frac{20}{2\times 7}\right]^2-...-\left[\frac{20}{17\times 19}\right]^2\\
&+\left[\frac{20}{2\times 3\times 5}\right]^2+...
\end{aligned}$$

روشن است، بسیاری از این جملات مساوی صفر هستند و در نتیجه محاسبه‌ی این مجموعه بسیار آسان می‌شود:

$$\begin{aligned}
&n(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_8)=100+36+16+4+1+1+1+1\\
&-9-4-1-1=145
\end{aligned}$$

و بنابراین تعداد زوج‌های مرتبی که نسبت به هم اول هستند، می‌شود:

$$400-145=255$$

و در نتیجه:

$$P(A)=\frac{255}{400}=\frac{51}{80}$$

آیا می‌توانید این کار را ادامه دهید؟ فکر می‌کنید این احتمال به چه عددی نزدیک می‌شود؟ به عنوان تمرین، این کار را با عددهای بزرگ‌تر انجام دهید و نتیجه‌ها را با هم مقایسه کنید.

قدم دوم: فرم‌بندی مسئله در حالت کلی

مسئله‌ی کلی را به این صورت فرم‌بندی و مدل‌سازی می‌کنیم:

دو عدد طبیعی a و b را به ترتیب و به تصادف، از میان اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی N انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو عدد نسبت به هم اول باشند، چه‌قدر است و آیا وقتی N به بی‌نهایت میل می‌کند ($N\to+\infty$)، این احتمال به حد معین میل می‌کند یا خیر؟

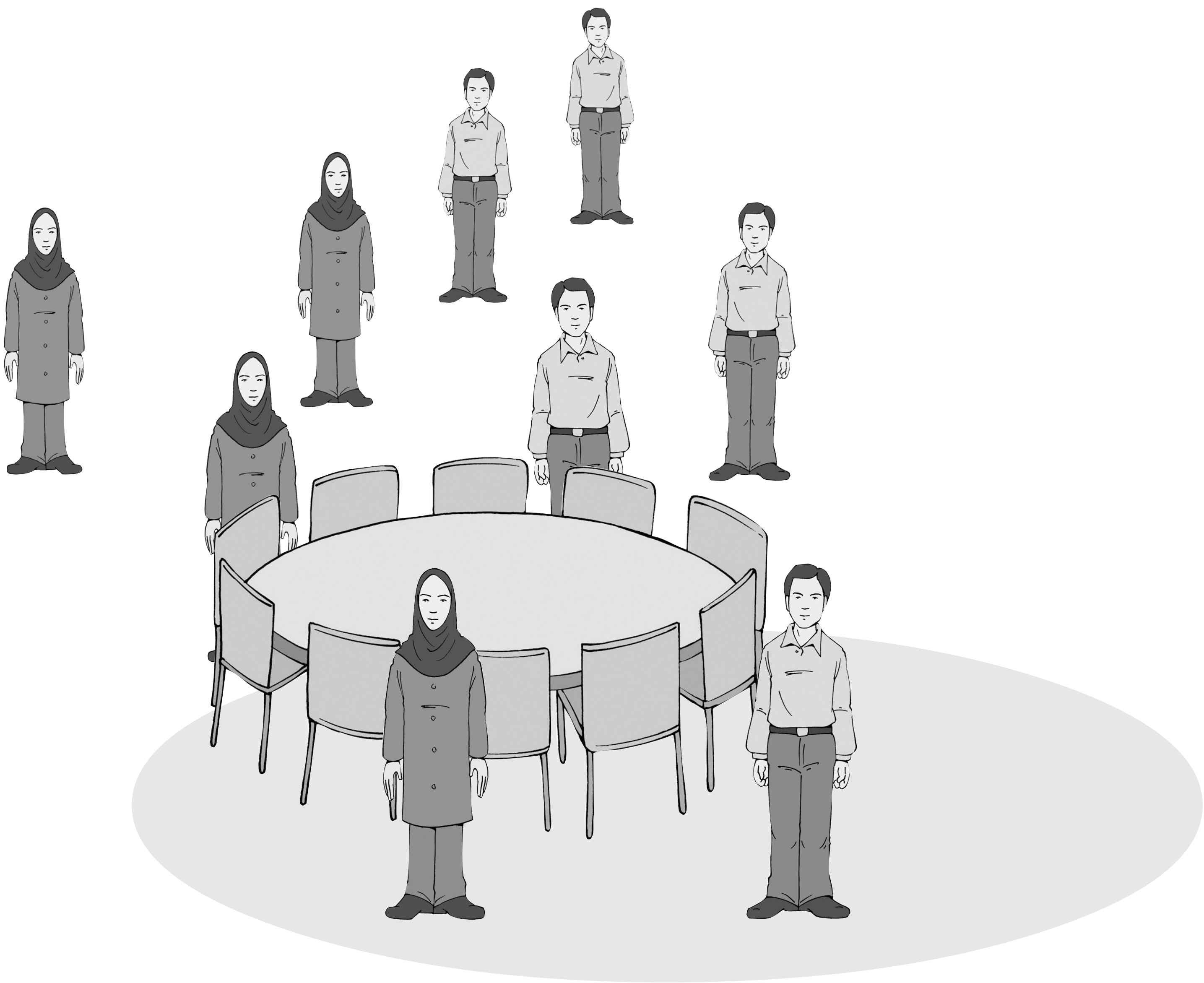
روشی که در این‌جا به کار می‌بریم، شبیه روشی است که در حالت‌های خاص به آن عمل کرده‌ایم. اگر فرض کنیم عددهای اول کوچک‌تر یا مساوی N، P_1 و P_2 و ... و P_n هستند، تعداد زوج‌های مرتب که هر دو بر P_1 یا P_2 یا ... یا P_n بخش‌پذیرند، به کمک اصل شمول ـ عدم شمول برابر است با:

$$\begin{aligned}
&n(A_1\cup A_2\cup ...A_n)=n(A_1)+n(A_2)+...+n(A_n)\\
&-n(A_1\cap A_2)-n(A_1\cap A_3)-...-n(A_{n-1}\cap A_n)\\
&+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+...+(-1)^{n-1}n(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n)\\
&=\left[\frac{N}{P_1}\right]^2+\left[\frac{N}{P_2}\right]^2+\left[\frac{N}{P_3}\right]^2+...+\left[\frac{N}{P_n}\right]^2-\left[\frac{N}{P_1P_2}\right]^2\\
&-\left[\frac{N}{P_1P_3}\right]^2...-\left[\frac{N}{P_{n-1}P_n}\right]^2+...+(-1)^{n-1}\left[\frac{N}{P_1P_2...P_n}\right]^2
\end{aligned}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&n(A)=N^2-\left[\frac{N}{P_1}\right]^2-\left[\frac{N}{P_2}\right]^2-...-\left[\frac{N}{P_n}\right]^2+\left[\frac{N}{P_1P_2}\right]^2\\
&+\left[\frac{N}{P_1P_3}\right]^2+...+\left[\frac{N}{P_{n-1}P_n}\right]^2-...+(-1)^n\left[\frac{N}{P_1P_2...P_n}\right]^2
\end{aligned}$$

حال باید حد $\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{n(A)}{N^2}$ را وقتی $N\to\infty$ بررسی کنیم. مشکل اصلی برای بررسی این حد، وجود عبارت‌های



شامل جزء صحیح است. اما این مشکل با توجه به این که $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=۱$، قابل حل است، زیرا: $[x]=x-\{x\}$ (که $\{x\}$ جزء اعشاری x است) و در نتیجه:

$$\frac{[x]}{x}=\frac{x-\{x\}}{x}=۱-\frac{\{x\}}{x}$$

بدیهی است: $۱>\{x\}\ge ۰$ و در نتیجه: $\frac{۱}{x}>\frac{\{x\}}{x}\ge ۰$ و

چون: $\lim_{x\to\infty}\frac{۱}{x}=۰$، با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim_{x\to\infty}\frac{\{x\}}{x}=۰$ و لذا:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=۱$$

بنابراین $[x]$ و x وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، هم‌ارزند. پس:

$$\lim_{N\to\infty}P(A)=\lim_{N\to\infty}\frac{۱}{N^۲}(N^۲-\frac{N^۲}{P_۱^۲}-\frac{N^۲}{P_۲^۲}-\dots-\frac{N^۲}{P_n^۲}+\frac{N^۲}{P_۱^۲P_۲^۲}+\dots+(-۱)^n\frac{N^۲}{P_۱^۲P_۲^۲\dots P_n^۲})=$$

$$\lim_{N\to\infty}(۱-\frac{۱}{P_۱^۲}-\frac{۱}{P_۲^۲}-\dots-\frac{۱}{P_n^۲}+\frac{۱}{P_۱^۲P_۲^۲}+\frac{۱}{P_۱^۲P_۳^۲}+\dots-\frac{۱}{P_۱^۲P_۲^۲P_۳^۲}-\dots+(-۱)^n\frac{۱}{P_۱^۲P_۲^۲\dots P_n^۲})$$

حال با توجه به «قضیه‌ی ویِت» که به صورت زیر است:

$$(x-a_۱)(x-a_۲)\dots(x-a_n)=x^n-(a_۱+a_۲+\dots+a_n)x^{n-۱}+(a_۱a_۲+a_۱a_۳+\dots+a_{n-۱}a_n)x^{n-۲}-\dots+(-۱)^n a_۱a_۲\dots a_n$$

می‌توان با فرض $x=۱$ و $a_i=\frac{۱}{P_i^۲}$، عبارت اخیر را به حاصل ضرب تجزیه کرد:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{P_۱^۲})(۱-\frac{۱}{P_۲^۲})\dots(۱-\frac{۱}{P_n^۲})$$

$$=\lim_{n\to\infty}(۱-\frac{۱}{۲^۲})(۱-\frac{۱}{۳^۲})\dots(۱-\frac{۱}{P_n^۲}) \qquad (۱)$$

و اکنون باید این حد را به دست آوریم. بدیهی است، تمام پرانتزها کوچک‌تر از ۱ هستند و لذا حاصل ضرب آن‌ها نیز

کوچک‌تر از ۱ است و نشان می‌دهیم که حد آن، مقداری مثبت متعلق به بازه‌ی (۰,۱) است. با مراجعه به حساب دیفرانسیل و انتگرال و بحث سری‌های هندسی، یادآور می‌شویم که سری زیر:

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^{2} + \dots,\quad |q|<1$$

موسوم به سری هندسی (تصاعد هندسی با قدر نسبت بین ۱ و ۱-)، هم‌گرا به $\frac{a}{1-q}$ است. یعنی وقتی تعداد جملات به بی‌نهایت می‌گراید، این مجموع به $\frac{a}{1-q}$ به دل‌خواه نزدیک می‌شود. بنابراین، با فرض $0 < x < 1$ می‌توان نوشت:

$$1+x+x^{2}+\dots=\frac{1}{1-x}$$

و با توجه به این دستور، می‌توان هر یک از پرانتزهای عبارت (۱) را معادل‌سازی کرد:

$$1-\frac{1}{2^{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{2^{6}}+\dots}$$

$$1-\frac{1}{3^{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{3^{6}}+\dots}$$

$$1-\frac{1}{5^{2}}=\frac{1}{1+\frac{1}{5^{2}}+\frac{1}{5^{4}}+\frac{1}{5^{6}}+\dots}$$

و از آن‌جا خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{2^{6}}+\dots)(1+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{3^{6}}+\dots)(1+\frac{1}{5^{2}}+\frac{1}{5^{4}}+\dots)\dots}$$

و به کمک قانون توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع، واضح است که حاصل ضرب پرانتزهای مخرج این کسر، شامل معکوس مربع‌های تمام عددهای طبیعی است. یعنی داریم:

$$P(A)=\frac{1}{1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+\dots}$$

بنابراین مقدار احتمال فوق نسبت مستقیمی با حد سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ دارد. یعنی اگر این سری هم‌گرا به L باشد، احتمال فوق برابر با $\frac{1}{L}$ است. به سادگی می‌توان نشان داد که این سری هم‌گراست. از حساب دیفرانسیل می‌دانیم که سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{P}}$ به‌ازای $P \le 1$ واگرا و به ازای $P > 1$ هم‌گرا است. علاوه بر آن، به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\dots+\frac{1}{n^{2}}\le 2-\frac{1}{n}$$

و چون: $\lim_{n\to\infty} 2-\frac{1}{n}=2$، پس مجموع سمت چپ همواره از ۲ کوچک‌تر است و در نتیجه سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ هم‌گراست. برای محاسبه‌ی احتمال فوق، باید مقدار دقیق این سری را به‌دست آوریم.

قدم سوم (قدم نهایی): محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ و تعیین مقدار احتمال

برای محاسبه‌ی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^{2}}$ یادآوری و اثبات چند لم اساسی لازم است:

لم ۱. یادآوری بسط دو جمله‌ای نیوتون. برای هر دو جمله‌ای a+b و عدد طبیعی n، می‌توان نوشت:

$$(a+b)^{n}=\binom{n}{0}a^{n}+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^{2}+\dots+\binom{n}{n}b^{n}$$

در این دستور، $\binom{n}{r}$ انتخاب r شیء از n شیء است که گاهی با نماد C (n,r) نمایش داده می‌شود. برای اثبات این دستور، روش‌های گوناگونی وجود دارند که به عنوان تمرین می‌توانید آن را به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی اثبات کنید. به این منظور و برای گذر استقرایی، باید از دستورهای $\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=1$ و رابطه‌ی مهم $\binom{k+1}{r}=\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1}$ (موسوم به اتحاد پاسکال) استفاده کنید.

لم ۲. قضیه‌ی دموآور:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{n}=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

در این دستور، θ زاویه‌ی دل‌خواه و i عدد موهومی با رابطه‌ی $i^{2}=-1$ است. اگر با مجموعه عددهای موهومی و اعداد مختلط آشنایی داشته باشید، درک این موضوع برایتان آسان است. ولی اگر با این موضوع آشنایی نداشته باشید، فهمیدن این‌که چگونه

ممکن است $i^2=-1$ شود، قدری بحث‌برانگیز است. ولی در اثبات این قضیه به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی، چندان مشکلی نخواهید داشت و زیاد خود را درگیر آن نکنید!

$$n=1:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^1=\cos\theta+i\sin\theta$$
$$n=k:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$
$$n=k+1:\ (\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

برای اثبات حکم استقرا از روی فرض، به سادگی می‌نویسیم:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\left[\cos k\theta.\cos\theta+i^2\sin k\theta.\sin\theta\right]+i\left[\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta\cos k\theta\right]$$
$$=\left[\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta.\sin\theta\right]+i\left[\sin k\theta\cos\theta+\sin\theta.\cos k\theta\right]$$
$$=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta$$

(از دستورهای مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ و تساوی $i^2=-1$ استفاده کردیم.)

لم ۳. نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\sin(n\theta)=\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta$$
$$+\binom{n}{5}\sin^5\theta\cos^{n-5}\theta-\ldots$$

برای اثبات از لم‌های ۱ و ۲ کمک می‌گیریم. سمت چپ تساوی لم ۲ را به کمک بسط دو جمله‌ای نیوتون بسط می‌دهیم (به تساوی $i^2=-1$ نیز توجه می‌کنیم). نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{0}\cos^n\theta+\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta.i+\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta.i^2$$
$$+\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta.i^3+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta.i^4+\ldots$$
$$=\left[\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots\right]$$
$$+i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta.\sin^3\theta\right.$$
$$\left.+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots\right]$$

و از مقایسه‌ی این عبارت با عبارت سمت راست لم ۲، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases}\sin n\theta=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta.\sin\theta-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta\\ \qquad+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots\\ \cos n\theta=\binom{n}{0}\cos^n\theta-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta\\ \qquad+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots\end{cases}$$

تمرین: به کمک دستورهای فوق ثابت کنید:

الف) $\sin 5x=16\sin^5x-20\sin^3x+5\sin x$

ب) $\cos 5x=16\cos^5x-20\cos^3x+5\cos x$

ج) $\cos 7x=64\cos^7x-112\cos^5x+56\cos^3x-7\cos x$

لم ۴. ثابت می‌کنیم برای هر عدد طبیعی n:

$$\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cot g^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots$$
$$+\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

اثبات: ابتدا معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌های آن $\cot g^2\frac{\pi}{2n+1}$، $\cot g^2\frac{2\pi}{2n+1}$ و ... و $\cot g^2\frac{n\pi}{2n+1}$ باشند. به این منظور از دستور لم ۳ کمک می‌گیریم:

$$\sin n\theta=\binom{n}{1}\sin\theta\cos^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\sin^3\theta\cos^{n-3}\theta+\ldots$$
$$=\sin^n\theta\left[\binom{n}{1}\cot g^{n-1}\theta-\binom{n}{3}\cot g^{n-3}\theta+\binom{n}{5}\cot g^{n-5}\theta-\ldots\right]$$

حال با جای‌گزینی $2n+1$ به جای n، و دادن $\theta=\frac{\pi}{2n+1}$ بدیهی است که $\sin(2n+1)\theta=0$. و به همین ترتیب، اگر $\theta=\frac{2\pi}{2n+1}$ و یا ... و یا $\theta=\frac{n\pi}{2n+1}$ باشد، باز هم عبارت سمت چپ تساوی بالا مساوی صفر می‌شود و $\sin\theta\neq 0$. در نتیجه باید عبارت درون کروشه‌ی بالا صفر باشد. پس معادله‌ی

$$\binom{2n+1}{1}\cot g^{2n}\theta-\binom{2n+1}{3}\cot g^{2n-2}\theta$$
$$+\binom{2n+1}{5}\cot g^{2n-4}\theta-\ldots=0$$

دارای ریشه‌های $\theta_1=\frac{\pi}{2n+1}$، $\theta_2=\frac{2\pi}{2n+1}$ و ... و $\theta_n=\frac{n\pi}{2n+1}$ و در نتیجه معادله‌ی:

$$\binom{2n+1}{1}x^{n}-\binom{2n+1}{3}x^{n-1}+\binom{2n+1}{5}x^{n-2}-\ldots=0$$

دارای ریشه‌های $\cot g^{2}\frac{\pi}{2n+1}$ ، $\cot g^{2}\frac{2\pi}{2n+1}$ ، ... و $\cot g^{2}\frac{n\pi}{2n+1}$ است.

حال به کمک قضیه‌ی وی‌یت، مجموع ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$\cot g^{2}\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^{2}\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+\cot g^{2}\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=-\frac{b}{a}=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}$$

نتیجه: با توجه به این که داریم: $1+\cot g^{2}\theta=\frac{1}{\sin^{2}\theta}$ ، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\sin^{2}\frac{\pi}{2n+1}}+\frac{1}{\sin^{2}\frac{2\pi}{2n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sin^{2}\frac{n\pi}{2n+1}}$$

$$=\frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{2}{3}n(n+1)$$

لم ۵. به ازای هر زاویه‌ی حاده‌ی α ، داریم:

$$\sin\alpha<\alpha<\mathrm{tg}\alpha$$

اثبات این لم را می‌توانید در بخش حد از کتاب حسابان سال سوم رشته‌ی ریاضی ـ فیزیک و یا هر کتاب جامع حساب دیفرانسیل و انتگرال ملاحظه کنید.

نتیجه: به ازای هر زاویه‌ی حادّه‌ی α داریم:

$$\cot g^{2}\alpha<\frac{1}{\alpha^{2}}<\frac{1}{\sin^{2}\alpha}$$

اکنون با توجه به این نتیجه و با جای گزینی مقادیر $\frac{\pi}{2n+1}$ ، $\frac{2\pi}{2n+1}$ و... و $\frac{n\pi}{2n+1}$ در این نابرابری‌ها و جمع کردن طرفین نابرابری‌ها خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}
\cot g^{2}\frac{\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^{2}}{\pi^{2}}<\frac{1}{\sin^{2}(\frac{\pi}{2n+1})}\\
\cot g^{2}\frac{2\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^{2}}{4\pi^{2}}<\frac{1}{\sin^{2}(\frac{2\pi}{2n+1})}\\
\vdots\\
\cot g^{2}\frac{n\pi}{2n+1}<\frac{(2n+1)^{2}}{n^{2}\pi^{2}}<\frac{1}{\sin^{2}(\frac{n\pi}{2n+1})}
\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\cot g^{2}\frac{\pi}{2n+1}+\cot g^{2}\frac{2\pi}{2n+1}+\ldots+\cot g^{2}\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$<\frac{(2n+1)^{2}}{\pi^{2}}+\frac{(2n+1)^{2}}{4\pi^{2}}+\ldots+\frac{(2n+1)^{2}}{n^{2}\pi^{2}}$$

$$<\frac{1}{\sin^{2}(\frac{\pi}{2n+1})}+\frac{1}{\sin^{2}(\frac{2\pi}{2n+1})}+\ldots+\frac{1}{\sin^{2}(\frac{n\pi}{2n+1})}$$

حال با استفاده از لم ۴ و نتیجه‌ی آن می‌توان عبارت‌های دو طرف نابرابری‌های فوق را با معادل‌های آن‌ها جای گزین کرد:

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\frac{(2n+1)^{2}}{\pi^{2}}+\frac{(2n+1)^{2}}{4\pi^{2}}+\ldots+\frac{(2n+1)^{2}}{n^{2}\pi^{2}}$$

$$<\frac{2}{3}n(n+1)\Rightarrow\frac{\pi^{2}.n(2n-1)}{3(2n+1)^{2}}<\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}+\ldots+\frac{1}{n^{2}}$$

$$<\frac{2n(n+1)\pi^{2}}{3(2n+1)^{2}}$$

حال به سادگی می‌توان حد عبارت‌های دو طرف نابرابری را محاسبه کرد و نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^{2}n(2n-1)}{3(2n+1)^{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{2}\pi^{2}}{3(4n^{2})}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)\pi^{2}}{3(2n+1)^{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{2}\pi^{2}}{3(4n^{2})}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

و با توجه به قضیه‌ی فشردگی (در مبحث حدّ کتاب‌های حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال به تفصیل در مورد آن بحث شده است) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1^{2}}+\frac{1}{2^{2}}+\ldots+\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

یعنی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}$ هم گرا به $\frac{\pi^{2}}{6}$ است و به این ترتیب کار به پایان می‌رسد.

اکنون دیگر می‌توانیم احتمال فوق را به سادگی به دست آوریم. دیدیم، احتمال آن که دو عدد طبیعی که به ترتیب و به تصادف انتخاب شده‌اند، نسبت به هم اول باشند، عکس مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2}}$ است. بنابراین:

$$P(A)=\frac{6}{\pi^{2}}$$

■

منبع:

مسائل پیکارجوی ریاضی با راه‌حل‌های مقدماتی (جلد اول و دوم)، نوشته یاگلوم، ترجمه‌ی غلامرضا یاسی‌پور.