

اشاره:

دستگاه شمار، روشی برای سر و کار داشتن با مفهوم «چندتا»ست. در دوره‌های متفاوت، فرهنگ‌های متفاوت، در این باره روش‌های گوناگونی پذیرفته‌اند که از شمارش اولیه‌ی «یک، دو، سه، خیلی» تا نمادنویسی بس پیچیده‌ی دهدهی مکانی، که امروزه به کارش می‌بریم، تنوع داشته‌اند.

دستگاه‌های شمار

اقوام «سومری»^۲ و «بابلی»^۳، که حدود ۴۰۰۰ سال پیش در سوریه، اردن و عراق کنونی ساکن بودند، در کارهای عملی روزانه‌ی خود، از دستگاهی مکان-ارزشی استفاده می‌کردند. این دستگاه را به این علت مکان-ارزشی می‌نامیم که در آن می‌توان «عدد» را با استفاده از موقعیت یک نماد بیان کرد. آن‌ها ۶۰ را به عنوان واحد مبنا به کار می‌بردند؛ یعنی آن‌چه که امروزه دستگاه در مبنای ۶۰ می‌نامیم. عددی که هنوز آثاری از آن در زندگی ما موجود است: ۶۰ ثانیه در دقیقه، و ۶۰ دقیقه در ساعت. حتی زمانی که به اندازه‌گیری زوایا می‌پردازیم، هنوز زاویه‌ی کامل را، علی‌رغم کوشش‌های سیستم متریک که آن را ۴۰۰ گراد می‌نامد، (و بنابراین هر زاویه‌ی قائمه برابر ۱۰۰ گراد است) ۳۶۰ درجه در نظر می‌گیریم. درحالی که نیاکان باستانی مان، در مرحله‌ی اول اعداد را برای انجام دادن کارهای عملی می‌خواستند. اسنادی در دست است که فرهنگ‌های اولیه‌ی مزبور، توسط خود ریاضیات نیز وسوسه می‌شدند، و با رخصت یافتن از کارهای عملی، به کندوکاو در آن‌ها می‌پرداختند. این کندوکاوها، به پیدایش آن‌چه می‌توان «جبر»ش نامید و نیز «خواص اشکال هندسی» انجامید.

دستگاه مصری، از قرن سیزدهم قبل از میلاد، از مبنای ۱۰ با دستگاهی از علائم «هیروگلیفی»^۴ استفاده می‌کرد. مصری‌ها به‌ویژه دستگاهی را توسعه دادند که به کسرهای می‌پرداخت. اما نمادنویسی دهدهی مکان-ارزشی



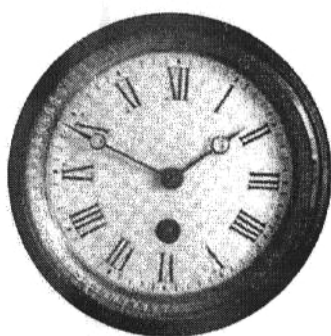
به کار بردن اعداد رومی آسان نیست. به عنوان نمونه، مفهوم MMMCDXLIII تنها زمانی روشن می شود که به طور ذهنی، پراشتهای لازم را درباره ی آن به کار ببریم، در این صورت (III)(XL)(CD)(MMM) به صورت $4 + 40 + 400 + 3000$ خوانده می شود. اکنون سعی در جمع زیر به عمل می آوریم $MMMCDXLIII + CCCXCI$. رومی ماهر در این هنر، از راه های میان بر و کلک استفاده می کند، اما برای ما یافتن پاسخ صحیح، بی آن که ابتدا آن را در دستگاه دهدهی محاسبه، و سپس نتیجه را به نماد رومی تبدیل کنیم، مشکل است:

جمع		
۳۴۴۴	→	MMMCDXLIII
+ ۳۹۴	→	CCCXCI
= ۳۸۳۸	→	MMMDCCLXXXVIII

ضرب دو عدد در دستگاه مبنایی، بسی مشکل تر است، و امکان دارد، حتی برای رومی ها نیز غیر ممکن باشد! برای ضرب ۳۴۴۴×۳۹۴ به ملحقات قرون وسطی نیاز داریم.

ضرب		
۳۴۴۴	→	MMMCDXLIII
$\times ۳۹۴$	→	CCCXCI
= ۱,۳۵۶,۹۳۶	→	MCCCLVMCMXXXVI

رومی ها، نماد خاصی برای صفر نداشتند. اگر از یک شهروند گیاه خوار رومی می پرسیدند امروز چند بطری آب مصرف کرده است، ممکن بود بنویسد III. اما در صورتی که می پرسیدند چند جوجه خورده است، نمی توانست بنویسد: ۰. آثاری از دستگاه رومی در صفحات مقدمه ی بعضی کتاب ها (گرچه نه در این یکی) موجود است، نیز بر سنگ های پایه ی ساختمان ها. پاره ای ساختارها، از قبیل MCM برای ۱۹۰۰، هرگز توسط رومی ها به کار نرفته اند، اما به دلیل پیروی از مد، در دوران جدید معرفی شده اند. رومی ها این عدد را به صورت



عدد را به صورت ساعت منسوب به لویی چهاردهم (XVIII)

امروزه ی ما از بابلی ها به دستمان رسیده، و بعدها توسط هندوها پالوده شده است. سودمندی دستگاه مورد بحث، در این است که می تواند برای بیان اعداد بسیار کوچک و بسیار بزرگ به کار رود. و محاسبات مان با استفاده از ارقام هندی-عربی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، می تواند با «سهولت نسبی» انجام گیرد. برای ملاحظه ی این مطلب، به «دستگاه رومی»^۵ نگاهی می افکنیم. این دستگاه گرچه نیازهای آن ها را برآورده می کرد، اما تنها متخصصان دستگاه بودند که از عهده ی انجام محاسبه با آن بر می آمدند.

دستگاه رومی



نمادهای مبنایی به کار رفته در دستگاه رومی ها، «ده ها» (M و X، I) نیمه های آن ها (D و L، V) بودند. این نمادها برای ساختن بقیه ی اعداد با هم ترکیب می شوند. این گونه مطرح شده که کاربرد I، II، III و IIII از ظاهر انگشتانمان استخراج شده اند، V را از شکل دست حاصل می کنیم، و با واژگون کردن آن، و به هم وصل کردن آن دو به هم برای ساختن X، دو دست یا ده انگشت را به دست می آوریم. C از «centum» و M از «mille»، کلمات لاتینی، به ترتیب، صد و هزار، آمده است. رومی ها S را نیز برای «نیمه» به کار می بردند، و دستگاه کسرهایی بر مبنای ۱۲ داشتند.

دستگاه رومی از روش «پیش و بعد» در تهیه ی نمادهای مورد نیاز استفاده می کرد، اما به نظر می رسد که این کار به طور یک سان پذیرفته نشده بود. رومی های باستان، تنها مدت ها بعد از آن که نوشتن IIII با IV مطرح شد، ترجیح دادند که چنین بنویسند. به نظر می رسد که ترکیب IX نیز به کار رفته باشد، اما یک رومی، در صورتی که

«SIX» نوشته می شد از آن معنی $۸\frac{1}{2}$ را درمی یافت! در این جا اعداد مبنایی دستگاه رومی را همراه با اضافاتی از دوران وسطی آورده ایم:

دستگاه عددی رومی ها و ملحقات قرون وسطی امپراطوری

نیمه S	پنج هزار V
یک I	ده هزار X
پنج V	پنجاه هزار L
ده X	صد هزار C
پنجاه L	پانصد هزار D
صد C	یک میلیون M

MDCCCC می نوشتند. لویی چهاردهم، پادشاه فرانسه که امروزه به صورت لویی XIV شناخته می شود، ترجیح می داد که به صورت لویی XIII شناخته شود. او فرمان داد ساعتش، ساعت ۴ را به صورت IIII نمایش دهد.

اعداد تمام دهدهی



ما به طور طبیعی «عددها» را با اعداد دهدهی می شناسیم. دستگاه دهدهی، با استفاده از شماره های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، بر مبنای ده بنا شده است. این دستگاه عملاً مبتنی بر «ده ها» و «یک ها» است، اما یک ها می توانند جذب «مبنای ۱۰» شوند. زیرا، زمانی که عدد ۳۹۴ را می نویسیم می توانیم مفهوم دهدهی آن را با گفتن این موضوع توضیح دهیم که این عدد، از ۳ صد، ۹ ده و ۴ واحد تشکیل شده است و می توانیم بنویسیم:

$$394 = 3 \times 100 + 9 \times 10 + 4 \times 1$$

این مطلب را می توان با استفاده از «توان ها»^۶ (نیز موسوم به «نماها»^۷ یا «شاخص ها»^۸ ی ۱۰ نیز نوشت،

$$394 = 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

که در آن $10^1 = 10 \times 10^0$ و $10^2 = 10 \times 10^1$ و بر حسب قرار داد: $10^0 = 1$. به این ترتیب در این توصیف مبنای «دهدهی»^۹ را برای دستگاه عددی روزمره مان، واضح تر ملاحظه می کنیم؛ دستگاهی که جمع و ضرب را به مقدار زیادی شفاف تر می کند.

ممیز یا نقطه ی دهدهی



تا این جا به نمایش دادن اعداد تمام توجه کرده ایم. ولی آیا دستگاه دهدهی می تواند از عهده ی اجزای یک عدد، مثلاً $\frac{572}{1000}$ نیز برآید؟ این عبارت، بدین معنی است که:

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{1000} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

در این مورد می توان «معکوس ها»^{۱۰} ی ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ را به عنوان توان های «منفی»^{۱۱} در نظر گرفت. بنابراین:

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-3} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-1}$$

و این عبارت را می توان به صورت ۵۷۲. نوشت که در آن، نقطه ی دهدهی آغاز توان های منفی ۱۰ را مشخص می کند. در صورتی که این عبارت را به عبارت دهدهی ۳۹۴ بیفزاییم،

بسط دهدهی عدد $\frac{572}{1000}$ را به دست می آوریم که به طور ساده ۵۷۲.۳۹۴ است.

نماد نویسی دهدهی، در مورد اعداد بزرگ، می تواند بسیار طولانی شود، بنابراین، در این حالت به «نماد نویسی علمی»^{۱۲} برمی گردیم. به عنوان نمونه، 1.356936892×10^9 نوشت که می توان به صورت $1.356936892 \times 10^9 E9$ در می آید. در این جا، توان ۹ یک واحد کم تر از ارقام موجود در عدد است و حرف E به جای «نما»^{۱۳} قرار گرفته است. گاهی امکان دارد مایل به استفاده از اعدادی حتی بزرگ تر باشیم. به عنوان نمونه، در مورد تعداد اتم های هیدروژن در جهان شناخته شده صحبت می کنیم. این تعداد در حدود 1.7×10^{77} برآورد شده است. عدد 10^{77} با توان منفی، عددی بسیار کوچک است، و سرو کار داشتن با آن با استفاده از نماد نویسی علمی آسان است. اندیشیدن در مورد این اعداد، با نمادهای رومی ناممکن است.

صفرها و یک ها



در حالی که مبنای ۱۰ جریانی متعارف در زندگی هر روزه است، بعضی کاربردها به مبنای دیگری نیاز دارند. «دستگاه دودویی»^{۱۴} که از مبنای ۲ استفاده می کند. اساس کار رایانه های مدرن است. زیبایی دستگاه دودویی در این است که در آن هر عدد را می توان تنها با استفاده از دو نماد ۰ و ۱ بیان کرد. گرچه تعادل در این اقتصاد از این جا به وجود می آید که عبارات عددی در این دستگاه، می توانند بسیار طولانی باشند.

اما چگونه می توان ۳۹۴ را در نماد نویسی دودویی بیان کرد؟ در این مورد با توان های ۲ سرو کار داریم، و پس از مقداری کار، می توانیم عبارت کامل را به صورت زیر به دست دهیم:

$$394 = 1 \times 256 + 1 \times 128 + 0 \times 64 + 0 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$$

به این ترتیب، ۳۹۴، با در نظر گرفتن صفرها و یک ها، عبارت است از ۱۱۰۰۰۱۰۱۰.

از آن جا که عبارات دودویی می تواند بسیار طولانی باشند، اغلب از، سایر مبنایها در محاسبه استفاده می شود. این مبنایها عبارت اند از «دستگاه هشت گانی»^{۱۵} (مبنای ۸) و «دستگاه

پی نوشت.....

1. Tony Crilly
2. Sumerians
3. Babylonians
4. hieroglyphic signs
5. Roman System
6. powers
7. exponentials
8. indices
9. decimal
10. reciprocals
11. negative
12. scientific notation
13. exponential
14. binary system
15. octal system
16. hexadecimal system

توان های ۲	دهدهی
2^0	۱
2^1	۲
2^2	۴
2^3	۸
2^4	۱۶
2^5	۳۲
2^6	۶۴
2^7	۱۲۸
2^8	۲۵۶
2^9	۵۱۲
2^{10}	۱۰۲۴

شانزده گانی^{۱۶} (مبنای ۱۶). در دستگاه هشت گانی تنها به نمادهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، احتیاج داریم، درحالی که شانزده گانی از ۱۶ نماد استفاده می کند. در این مبنا، مرسوم آن است که از

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، A، B، C، D، E، F

استفاده به عمل آید. در این مورد چون ۱۰ متناظر با حرف A است، عدد ۳۹۴ در دستگاه شانزده گانی به صورت ۱۸A نمایش داده می شود. به همین ترتیب، برای ذهن آسان تر است که ABC را به جای ۲۷۴۸ در دستگاه دهدهی به کار برد!

بیش تر بدانید



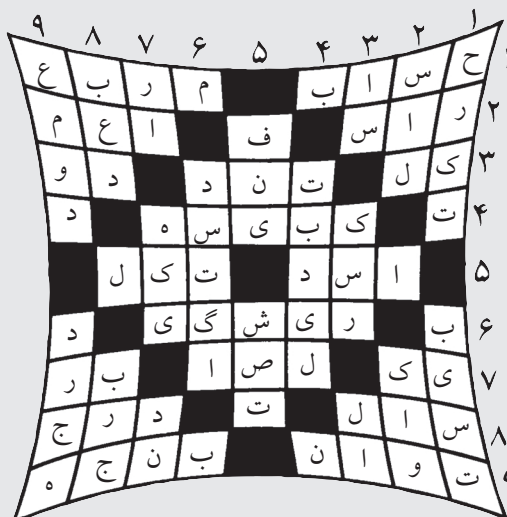
۳۰۰۰ قبل از میلاد: مردم عهد حجر در اروپا، برای ثبت اعداد روی استخوان علامت می زدند.

۲۰۰۰ قبل از میلاد: بابلی ها برای نشان دادن اعداد از نمادها استفاده می کردند.

۶۰۰ میلادی: صورت ابتدایی عددنویسی دهدهی مدرن، در هند به کار رفته است.

۱۲۰۰ میلادی: دستگاه هندی-عربی عددنویسی ۱، ...، ۹ و صفر، گسترش یافت.

۱۶۰۰ میلادی: نمادهای دستگاه دهدهی، صورت های مدرن شناخته شده ای را اختیار کردند.



پاسخ جدول ریاضی
رشد برهان متوسطه ۶۲

