احمد قندهاری

اتحادهای مثلثاتی

تعریف: هر تساوی مثلثاتی، بین یک یا چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای تعریف‌شده در آن، همواره برقرار باشد، یک اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شود. برای مثال، تساوی $\sin^۴ x + \cos^۴ x + \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x = ۱ \quad (I)$ یک اتحاد مثلثاتی است. اگر به جای x، هر زاویه‌ای را قرار دهیم، تساوی فوق برقرار است.

اثبات یک اتحاد مثلثاتی معمولاً به سه روش صورت می‌گیرد:

روش اول: یک طرف اتحاد مثلثاتی را که عبارت مفصل‌تری است، با استفاده از فرمول‌های مثلثاتی و رابطه‌های دیگر مثلثاتی، آن‌قدر ساده‌تر می‌کنیم و تغییر می‌دهیم تا به طرف دیگر برسیم.

مثال ۱. درستی اتحاد $\frac{\tan A}{\cot B} = \frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A}$ را ثابت کنید.

حل: عبارت سمت چپ این اتحاد را ساده می‌کنیم تا به عبارت سمت راست برسیم.

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\tan A - \tan B}{\cot B - \cot A} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{۱}{\tan B} - \frac{۱}{\tan A}} = \frac{\tan A - \tan B}{\frac{\tan A - \tan B}{\tan A . \tan B}}$$

$$\text{عبارت سمت چپ} = \tan A . \tan B = \tan A \times \frac{۱}{\cot B}$$

$$= \frac{\tan A}{\cot B}$$ برابر عبارت سمت راست

روش دوم: فرض می‌کنیم تساوی اتحاد درست باشد. دو طرف تساوی را به کمک فرمول‌ها و روابط مثلثاتی به صورت ساده‌تر می‌نویسیم تا به دو عبارت برابر برسیم.

مثال۲. درستی اتحاد $\frac{\sin^3 a+\cos^3 a}{\sin a+\cos a}=\frac{2-\sin 2a}{2}$ را ثابت کنید.

حل: فرض می‌کنیم تساوی این اتحاد درست باشد. برای حل به روش دوم، طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\Rightarrow 2(\sin^3 a+\cos^3 a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

عبارت سمت چپ را با استفاده از اتحاد زیر بسط می‌دهیم:

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a+\cos a)(\underbrace{\sin^2 a+\cos^2 a}_{1}-\sin a\cos a)$$

$$=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

$$\Rightarrow 2(\sin a+\cos a)(1-\frac{1}{2}\sin 2a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

$$\Rightarrow (\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)=(\sin a+\cos a)(2-\sin 2a)$$

▲▼▲

روش سوم: با نوشتن روابطی و با استفاده از فرمول‌ها و روابط مثلثاتی، صورت اصلی اتحاد را می‌سازیم (این روش در واقع برگشت‌پذیری روش دوم است).

مثال۳. درستی اتحاد $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$ را ثابت کنید.

حل: به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$2\sin x=2\sin x$$

دو طرف تساوی را بر $(1-\cos x)\neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

عبارت سمت چپ را در $\frac{\sin x}{\sin x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{2\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

تفکیک می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x+(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ (1-\cos x)\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$$

▲▼▲

توجه: این روش معمول نیست، ولی در اتحادهای مثلثاتی مسائلی داریم که با این روش، راحت‌تر حل می‌شوند.

مسائل

۱. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(1-\cos^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=\tan^2\alpha$$

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=(1-\cos^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)=(\sin^2\alpha)(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=(\sin^2\alpha)(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha})=\sin^2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha})$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$$

▲▼▲

۲. صحت اتحاد $(\cot\alpha-1)^2+(\cot\alpha+1)^2=\frac{2}{\sin^2\alpha}$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

$$\text{عبارت سمت چپ}=\cot^2\alpha+1-2\cot\alpha+\cot^2\alpha+1+2\cot\alpha$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2\cot^2\alpha+2=2(\cot^2\alpha+1)=2(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1)$$

$$=2(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha})$$

$$\text{عبارت سمت چپ}=2(\frac{1}{\sin^2\alpha})=\frac{2}{\sin^2\alpha}$$

▲▼▲

۳. صحت اتحاد $\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}$ را ثابت کنید.

حل: به روش اول حل می‌کنیم:

عبارت سمت چپ $=\frac{\overbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}^{1}-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{\sin^2-\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}$

کسر را تفکیک می‌کنیم:

عبارت سمت چپ $=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\tan\alpha-\cot\alpha$

▲▼▲

۴. درستی اتحاد $\sin 2\alpha=\frac{1-\tan^2(45^\circ-\alpha)}{1+\tan(45^\circ-\alpha)}$ را ثابت کنید.

حل: $45^\circ-\alpha=x$ فرض می‌شود.

عبارت سمت چپ $=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}=\frac{1-\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}{1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}}=\frac{\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}}{\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}}$

$=\frac{\frac{\cos2x}{\cos^2x}}{\frac{1}{\cos^2x}}$

عبارت سمت چپ $=\cos2x=\cos(90^\circ-2\alpha)=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)$

$=\sin2\alpha$

▲▼▲

۵. درستی اتحاد $\sin15^\circ+\tan30^\circ\cos15^\circ=\frac{\sqrt6}{3}$ را ثابت کنید.

حل:

عبارت سمت چپ $=\sin15^\circ+\frac{\sin30^\circ}{\cos30^\circ}.\cos15^\circ$

عبارت سمت چپ $=\frac{\sin15^\circ\cos30^\circ+\cos15^\circ\sin30^\circ}{\cos30^\circ}$

$=\frac{\sin(15^\circ+30^\circ)}{\cos30^\circ}=\frac{\sin45^\circ}{\cos30^\circ}$

عبارت سمت چپ $=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\times\frac{\sqrt3}{\sqrt3}=\frac{\sqrt6}{3}$

▲▼▲

۶. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

حل:

عبارت سمت چپ $=\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$

عبارت سمت چپ $=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha.\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha.\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

▲▼▲

۷. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$\sin200^\circ.\sin310^\circ+\cos340^\circ.\cos50^\circ=\frac{\sqrt3}{2}$

حل:

$\sin200^\circ=\sin(180^\circ+20^\circ)=\sin(\pi+20^\circ)=-\sin20^\circ$

$\sin310^\circ=\sin(360^\circ-50^\circ)=\sin(2\pi-50^\circ)=-\sin50^\circ$

$\cos340^\circ=\cos(360^\circ-20^\circ)=\cos(2\pi-20^\circ)=\cos20^\circ$

عبارت سمت چپ $=(-\sin20^\circ)(-\sin50^\circ)+\cos20^\circ\cos50^\circ$

$=\cos20^\circ\cos50^\circ+\sin20^\circ\sin50^\circ$

$=\cos(50^\circ-20^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt3}{2}$

▲▼▲

۸. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(240^\circ+\alpha)=0$

حل:

عبارت سمت چپ $=\cos\alpha+\cos(180^\circ-60^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ+60^\circ+\alpha)$

عبارت سمت چپ $=\cos\alpha+\cos(\pi+(\alpha-60^\circ))+\cos(\pi+(\alpha+60^\circ))$

عبارت سمت چپ $=\cos\alpha-\cos(\alpha-60^\circ)-\cos(\alpha+60^\circ)$

عبارت سمت چپ $=\cos\alpha-(\cos\alpha\cos60^\circ+\sin\alpha\sin60^\circ)-$

$(\cos\alpha\cos60^\circ-\sin\alpha\sin60^\circ)$

عبارت سمت چپ $=\cos\alpha-\cos\alpha\cos60^\circ-\sin\alpha\sin60^\circ-$

$\cos\alpha\cos60^\circ+\sin\alpha\sin60^\circ$

عبارت سمت چپ $=\cos\alpha-2\cos\alpha.\cos60^\circ=\cos\alpha-2\cos\alpha(\frac{1}{2})$

$=\cos\alpha-\cos\alpha=0$

▲▼▲

۹. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

حل: داریم: $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

عبارت سمت چپ $= \sin^4\alpha+\cos^4\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

عبارت سمت چپ $= (1)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1-2(\sin\alpha.\cos\alpha)^2$

$= 1-2(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2$

عبارت سمت چپ $= 1-2(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha) = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

به خاطر بسپارید: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

▲▼▲

۱۰. صحت اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

حل:

توجه داریم:

$$\begin{cases} a^6+b^6 = (a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2) \\ a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \end{cases}$$

و $\Rightarrow a^6+b^6 = (a^2+b^2)\left[(a^2+b^2)^2-3a^2b^2\right]$

عبارت سمت چپ $= \sin^6\alpha+\cos^6\alpha = (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\times\left[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right]$

$= 1\left[1-3(\sin\alpha\cos\alpha)^2\right] = 1-3(\frac{1}{2}\sin 2\alpha)^2 = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

به خاطر بسپارید: $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

▲▼▲

۱۱. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}-1}+\frac{\sin\theta}{\frac{1}{\sin\theta}+1} = 2\tan^2\theta$$

حل:

عبارت سمت چپ $= \frac{\sin\theta}{\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta}}+\frac{\sin\theta}{\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{1+\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta(1+\sin\theta)+\sin^2\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

$= \frac{\sin^2\theta+\sin^3\theta+\sin^2\theta-\sin^3\theta}{1-\sin^2\theta}$

$= \frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2\tan^2\theta$

▲▼▲

۱۲. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^4\alpha}-1-\tan^4\alpha = 2\tan^2\alpha$$

حل:

عبارت سمت چپ $= (\frac{1}{\cos^2\alpha})^2-1-\tan^4\alpha = (1+\tan^2\alpha)^2-1-\tan^4\alpha$

عبارت سمت چپ $= 1+\tan^4\alpha+2\tan^2\alpha-1-\tan^4\alpha = 2\tan^2\alpha$

▲▼▲

۱۳. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos^4\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\tan^2\alpha} = \cos^2\alpha$$

حل:

عبارت سمت چپ $= \frac{1}{\cos^2\alpha(\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1})+\sin^2\alpha+\tan^2\alpha}$

$= \frac{1}{\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}+\tan^2\alpha}$

$= \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha$

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱. اگر $0 < x < \pi$ باشد، آن‌گاه به ازای چه مقادیری از m، معادله‌ی $2\tan\frac{x}{2} = 4-m^2$ جواب دارد؟

۱) $m > 2$ یا $m < -2$ ۲) $-2 < m < 2$ ۳) $-4 < m < 4$ ۴) $m > 4$ یا $m < -4$

۲. حاصل $\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}+\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}$ برابر است با:

۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۳. حاصل $\tan ۲۱^\circ+\tan ۳۹^\circ+\sqrt{۳}\tan ۲۰^\circ\tan ۶۰^\circ$ برابر است با :

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) -۱

۴. حاصل $\frac{\sqrt{۳}}{\sin ۸۰^\circ}-\frac{۱}{\sin ۱۰^\circ}$ برابر است با :

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵. حاصل $\cos^{۲} ۷۰^\circ-\cos^{۲} ۲۰^\circ$ برابر است با :

۱) $\sin ۴۰^\circ$ ۲) $-\sin ۵۰^\circ$ ۳) $-\sin ۸۰^\circ$ ۴) $-\sin ۷۰^\circ$

۶. حاصل $\sin^{۴}\frac{\pi}{۱۲}+\cos^{۴}\frac{\pi}{۱۲}$ برابر است با :

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $-\frac{۷}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۷. حاصل $\sin^{۶}\frac{\pi}{۱۲}+\cos^{۶}\frac{\pi}{۱۲}$ برابر است با :

۱) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۲}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۳}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۴}{۱۶}$

۸. اگر $\frac{\pi}{۲}<x<\pi$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}}$ برابر است با :

۱) tanx ۲) cotx ۳) -tanx ۴) -cotx

۹. حاصل عبارت $\sin ۱۵^\circ+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\cos ۱۵^\circ$ برابر است با :

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$

۱۰. حاصل کسر $\frac{۸\cos\frac{x}{۲}.\cos\frac{x}{۴}\cos x}{\sin ۲x}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{\cos\frac{x}{۲}}$ ۳) $\frac{۱}{\sin\frac{x}{۴}}$ ۴) $\frac{۱}{\cos\frac{x}{۴}}$

۱۱. حاصل $\cos^{۲}(x-\frac{\pi}{۴})-\cos^{۲}(x+\frac{\pi}{۴})$ برابر است با :

۱) $\cos ۲x$ ۲) $\sin ۲x$ ۳) $-\sin ۲x$ ۴) $-\cos ۲x$

۱۲. حاصل $\cos\frac{\pi}{۵}.\cos\frac{۳\pi}{۵}$ برابر است با :

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۳. اگر $\cot\alpha$ و $\cot\beta$ ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۲x-۲=۰$ باشند، آن‌گاه $\tan(\alpha+\beta)$ برابر است با :

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۴. حاصل کسر $\frac{۲\sin\alpha-\sin ۲\alpha}{۲\sin\alpha+\sin ۲\alpha}$ برابر است با : $(\alpha\neq k\pi)$

۱) $\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ ۲) $\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ ۳) $\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ ۴) $\cot^{۲}\frac{\alpha}{۲}$

۱۵. حاصل $\cos^{۲} ۷۰^\circ-\cos^{۲} ۲۰^\circ$ برابر است با :

۱) $\cos ۴۰^\circ$ ۲) $-\cos ۴۰^\circ$ ۳) $-\cos ۷۰^\circ$ ۴) $-\sin ۷۰^\circ$

حل سؤالات چهارگزینه‌ای

۱. گزینه‌ی ۲ :

$$۰<x<\pi \Rightarrow ۰<\frac{x}{۲}<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \tan\frac{x}{۲}>۰$$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{۴-m^{۲}}{۲} \Rightarrow \frac{۴-m^{۲}}{۲}>۰ \Rightarrow ۴-m^{۲}>۰ \Rightarrow m^{۲}<۴$$

$$\Rightarrow -۲<m<۲$$

۲. گزینه‌ی ۳ :

$$A=\frac{۱-\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan ۱۵^\circ}+\frac{۱+\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan ۱۵^\circ}$$

$$=\frac{\tan ۴۵^\circ-\tan ۱۵^\circ}{۱+\tan ۴۵^\circ\tan ۱۵^\circ}+\frac{\tan ۴۵^\circ+\tan ۱۵^\circ}{۱-\tan ۴۵^\circ\tan ۱۵^\circ}$$

$$=\tan(۴۵^\circ-۱۵^\circ)+\tan(۴۵^\circ+۱۵^\circ)=\tan ۳۰^\circ+\tan ۶۰^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۳. گزینه‌ی ۱ : $۲۱^\circ + ۳۹^\circ = ۶۰^\circ \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \tan(۲۱^\circ + ۳۹^\circ)$

$$\Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{\tan ۲۱^\circ + \tan ۳۹^\circ}{۱ - \tan ۲۱^\circ \tan ۳۹^\circ}$$

$$\Rightarrow \tan ۲۱^\circ + \tan ۳۹^\circ = \sqrt{۳} - \sqrt{۳} \tan ۲۱^\circ \tan ۳۹^\circ$$

$$\Rightarrow \tan ۲۱^\circ + \tan ۳۹^\circ + \sqrt{۳} \tan ۲۱^\circ \tan ۳۹^\circ = \sqrt{۳}$$

۴. گزینه‌ی ۱ : $\sin ۸۰^\circ = \sin(۹۰^\circ - ۱۰) = \sin(\frac{\pi}{۲} - ۱۰^\circ) = \cos ۱۰^\circ$

$$\frac{۱}{\sin ۱۰^\circ} - \frac{\sqrt{۳}}{\cos ۱۰^\circ} = \frac{\cos ۱۰^\circ - \sqrt{۳} \sin ۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ \cos ۱۰^\circ}$$

$$= \frac{\cos ۱۰^\circ - \tan ۶۰^\circ \sin ۱۰^\circ}{\frac{۱}{۲} \sin ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{\cos ۱۰^\circ - \frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ} \sin ۱۰^\circ}{\frac{۱}{۲} \sin ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\cos ۶۰^\circ \cos ۱۰^\circ - \sin ۱۰^\circ \sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}}{\frac{۱}{۲} \sin ۲۰^\circ} = \frac{\frac{\cos(۶۰^\circ + ۱۰^\circ)}{\cos ۶۰^\circ}}{\frac{۱}{۲} \sin ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{\cos ۷۰^\circ}{\frac{۱}{۲} \sin ۲۰ \cos ۶۰^\circ} = \frac{\cos(۹۰^\circ - ۲۰^\circ)}{\frac{۱}{۲} \sin ۲۰^\circ (\frac{۱}{۲})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{۲} - ۲۰^\circ)}{\frac{۱}{۴} \sin ۲۰^\circ}$$

$$= \frac{\sin ۲۰^\circ}{\frac{۱}{۴} \sin ۲۰^\circ} = ۴$$

۵. گزینه‌ی ۲ :

$$\cos^۲ ۷۰^\circ - \cos^۲ ۲۰^\circ = \cos^۲(\frac{\pi}{۲} - ۲۰^\circ) - \cos^۲ ۲۰^\circ$$

$$= \sin^۲ ۲۰^\circ - \cos^۲ ۲۰^\circ$$

$$= -(\cos^۲ ۲۰^\circ - \sin^۲ ۲۰^\circ) = -(\cos ۴۰^\circ)$$

$$= -\cos(\frac{\pi}{۲} - ۵۰^\circ) = -\sin ۵۰^\circ$$

۶. گزینه‌ی ۱ : در مسئله‌ی ۹ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^۴ \alpha + \cos^۴ \alpha = ۱ - \frac{۱}{۲} \sin^۲ ۲\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^۴ \frac{\pi}{۱۲} + \cos^۴ \frac{\pi}{۱۲} = ۱ - \frac{۱}{۲} \sin^۲ \frac{\pi}{۶} = ۱ - \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})^۲ = ۱ - \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

۷. گزینه‌ی ۳ : در مسئله‌ی ۱۰ درس همین مقاله داشتیم:

$$\sin^۶ \alpha + \cos^۶ \alpha = ۱ - \frac{۳}{۴} \sin^۲ ۲\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^۶ \frac{\pi}{۱۲} + \cos^۶ \frac{\pi}{۱۲} = ۱ - \frac{۳}{۴} \sin^۲ \frac{\pi}{۶} = ۱ - \frac{۳}{۴}(\frac{۱}{۲})^۲$$

$$= ۱ - \frac{۳}{۱۶} = \frac{۱۳}{۱۶}$$

۸. گزینه‌ی ۳ : $\sqrt{\frac{۱ - \cos ۲x}{۱ + \cos ۲x}} = \sqrt{\frac{۲\sin^۲ x}{۲\cos^۲ x}} = \sqrt{\tan^۲ x} = |\tan x|$

$$\frac{\pi}{۲} < x < \pi \Rightarrow \tan x < ۰ \Rightarrow |\tan x| = -\tan x$$

۹. گزینه‌ی ۳ : $\sin ۱۵^\circ + \frac{\sqrt{۳}}{۳} \cos ۱۵^\circ = \sin ۱۵^\circ + \tan ۳۰^\circ . \cos ۱۵^\circ$

$$= \sin ۱۵^\circ + \frac{\sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ} . \cos ۱۵^\circ$$

$$= \frac{\sin ۱۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \cos ۱۵^\circ \sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ} = \frac{\sin(۳۰^\circ + ۱۵^\circ)}{\cos ۳۰^\circ} = \frac{\sin ۴۵^\circ}{\cos ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۱۰. گزینه‌ی ۳ : $\frac{۸\cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۴} . \cos x}{۲(\sin x) \cos x} = \frac{۸\cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۴} \cos x}{۲(۲(\sin \frac{x}{۲}) \cos \frac{x}{۲}) \cos x}$

$$= \frac{۸\cos \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۴} \cos x}{۸\sin \frac{x}{۴} . \cos \frac{x}{۴} \cos \frac{x}{۲} . \cos x} = \frac{۱}{\sin \frac{x}{۴}}$$

۱۱. گزینه‌ی ۲ ؛ داریم: $\cos^۲ x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}$ ، پس:

$$\cos^۲(x - \frac{\pi}{۴}) - \cos^۲(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{۱ + \cos(۲x - \frac{\pi}{۲})}{۲} - \frac{۱ + \cos(۲x + \frac{\pi}{۲})}{۲}$$

$$= \frac{۱ + \cos(\frac{\pi}{۲} - ۲x)}{۲} - \frac{۱ + \cos(\frac{\pi}{۲} + ۲x)}{۲}$$

$$= \frac{۱ + \sin ۲x}{۲} - \frac{۱ - \sin ۲x}{۲} = \frac{۱ + \sin ۲x - ۱ + \sin ۲x}{۲}$$

$$= \frac{۲\sin ۲x}{۲} = \sin ۲x$$

۱۲. گزینه‌ی ۲ :

$$\cos \frac{\pi}{۵} . \cos \frac{۳\pi}{۵} = \cos \frac{\pi}{۵} \cos(\pi - \frac{۲\pi}{۵}) = -\cos \frac{\pi}{۵} \cos \frac{۲\pi}{۵}$$

$$-\cos \frac{\pi}{۵} . \cos \frac{۲\pi}{۵} \times \frac{۴\sin \frac{\pi}{۵}}{۴\sin \frac{\pi}{۵}} = \frac{-۲(۲\sin \frac{\pi}{۵} \cos \frac{\pi}{۵}) . \cos \frac{۲\pi}{۵}}{۴\sin \frac{\pi}{۵}}$$

$$= \frac{-۲(\sin \frac{۲\pi}{۵} . \cos \frac{۲\pi}{۵})}{۴\sin \frac{\pi}{۵}} = \frac{-\sin \frac{۴\pi}{۵}}{۴\sin \frac{\pi}{۵}} = \frac{-\sin(\pi - \frac{\pi}{۵})}{۴\sin \frac{\pi}{۵}}$$

$$= \frac{-\sin \frac{\pi}{۵}}{۴\sin \frac{\pi}{۵}} = \frac{-۱}{۴}$$

۱۳. گزینه‌ی ۲ : $\cot \alpha . \cot \beta = \frac{c}{a} = -۲$ و $\cot \alpha + \cot \beta = -\frac{b}{a} = ۲$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan a + \tan \beta}{۱ - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{۱}{\cot \alpha} + \frac{۱}{\cot \beta}}{۱ - \frac{۱}{\cot \alpha . \cot \beta}} = \frac{\frac{\cot \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha . \cot \beta}}{۱ - \frac{۱}{\cot \alpha . \cot \beta}}$$

$$= \frac{\frac{۲}{-۲}}{۱ - \frac{۱}{-۲}} = \frac{-۱}{۱ + \frac{۱}{۲}} = \frac{-۱}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}$$

۱۴. گزینه‌ی ۳ :

$$\frac{۲\sin \alpha - ۲\sin \alpha \cos \alpha}{۲\sin \alpha + ۲\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{۲\sin \alpha(۱ - \cos \alpha)}{۲\sin \alpha(۱ + \cos \alpha)} = \frac{۱ - \cos \alpha}{۱ + \cos \alpha}$$

$$= \frac{۲\sin^۲ \frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲ \frac{\alpha}{۲}} = \tan^۲ \frac{\alpha}{۲}$$

۱۵. گزینه‌ی ۲ : $\cos^۲ ۷۰^\circ - \cos^۲ ۲۰^\circ = \cos^۲(\frac{\pi}{۲} - ۲۰^\circ) - \cos^۲ ۲۰^\circ$

$$= \sin^۲ ۲۰^\circ - \cos^۲ ۲۰^\circ = -(\cos^۲ ۲۰^\circ - \sin^۲ ۲۰^\circ) = -\cos ۴۰^\circ$$

■