سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi- moosavi@ yahoo.com

۷

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

اشاره:

در قسمت قبل به بسیاری از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره قصد داریم برخی از کاربردهای هم‌نهشتی را در حل مسئله‌های گوناگون و مطرح در المپیادهای ریاضی مورد کنکاش قرار دهیم تا قوت مطلب از این جنبه نیز نشان داده شود. بنابراین، ابتدا به حل تعدادی از مسئله‌های المپیادهای کشورهای متفاوت که در رابطه با موضوع هستند، می‌پردازیم و سپس تمرین‌هایی نظیر مسئله‌های حل شده ارائه می‌دهیم که با توجه به مثال‌ها می‌توانید آن‌ها را حل کنید.

حل مسئله‌هایی از المپیادهای کشورهای گوناگون به کمک هم‌نهشتی

مسئله‌ی ۱. اگر A مجموع ارقام عدد $N = ۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ و B مجموع ارقام A باشد، مجموع ارقام B را تعیین کنید (هفدهمین IMO، ۱۹۷۵).

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که مجموع ارقام B بسیار کوچک است:

$$N = ۴۴۴۴^{۴۴۴۴} < ۱۰۰۰۰^{۵۰۰۰} = ۱۰^{۲۰۰۰۰}$$

N کوچک‌تر از یک عدد ۲۰۰۰۰ رقمی است. اگر همه‌ی ارقام را ۹ در نظر بگیریم:

$$A < ۹ \times ۲۰۰۰۰ = ۱۸۰۰۰۰$$

عددی کوچک‌تر از ۱۸۰۰۰۰ که دارای بزرگ‌ترین مجموع ارقام باشد، عدد ۱۷۹۹۹۹ است. پس:

$$B \le ۴۴ = ۱ + ۷ + ۹ + ۹ + ۹ + ۹$$

در بین اعداد کوچک‌تر از ۴۴ عدد ۳۹ از نظر مجموع ارقام (۱۲=۹+۳) بزرگ‌ترین عدد است، بنابراین جواب مسئله عددی نا بیشتر از ۱۲ خواهد بود. از طرفی می‌دانیم هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است. بنابراین، عددی که مورد نظر است با N به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت خواهد بود. از طرف دیگر:

$$N = ۴۴۴۴^{۴۴۴۴} \overset{۹}{\equiv} ۷^{۴۴۴۴} \overset{۹}{\equiv} (۷^۳)^{۱۴۸۱} \times ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱ \times ۷ = ۷$$

پس با توجه به $۷^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱$ می‌توان نوشت:

$$N \overset{۹}{\equiv} ۷$$

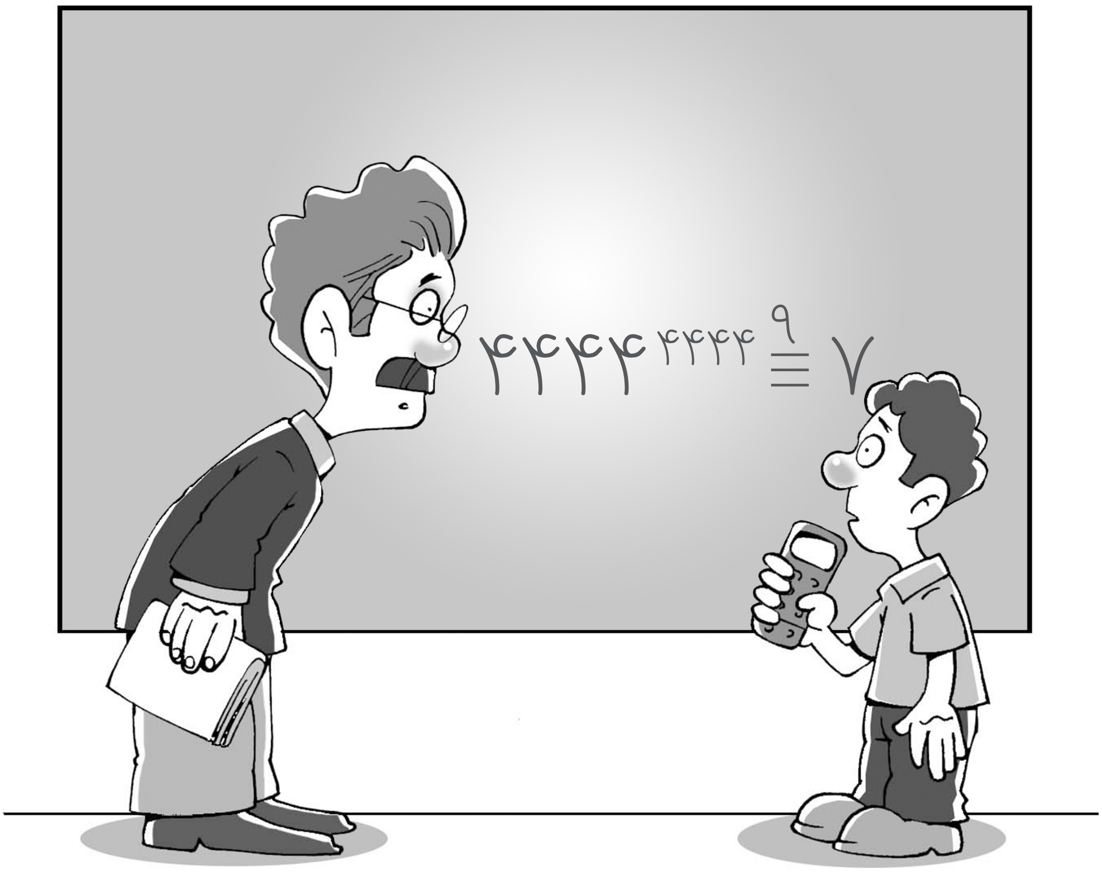
بنابراین، جواب مسئله عدد ۷ خواهد بود، زیرا تنها عددی است که کوچک‌تر از ۱۲ و با ۷ به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است. در واقع از ابتدا می‌توانستیم بنویسیم:

$$N = ۴۴۴۴^{۴۴۴۴} \overset{۹}{\equiv} A \overset{۹}{\equiv} B \le ۱۲$$

و از هم‌نهشتی $N \overset{۹}{\equiv} ۷$ و نامعادله‌ی $B \le ۱۲$، به جواب بدیهی $B = ۷$ برسیم.

زیرا از این نکته استفاده کردیم که: «هر عددی با مجموع ارقامش به پیمانه‌ی ۹ هم‌نهشت است.»

مسئله‌ی ۲: رقم پنجم از سمت راست عدد $M = ۵^{۵^{۵^{۵}}}$ را تعیین کنید (بخارست، ۱۹۸۶).



حل: این مسئله معادل هم‌نهشتی زیر است:

$$M = ۵^{۵^{۵^{۵}}} \overset{۱۰^{۵}}{\equiv} r$$

ممکن است از معادله‌ی هم‌نهشتی بالا، تعیین r مشکل باشد. به همین خاطر، ابتدا باقی مانده‌ی M را به پیمانه‌ی $۲^{۵}$ تعیین می‌کنیم. به این منظور از قضیه‌ی اویلر (اگر a و n نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} ۱$) استفاده می‌کنیم:

$$۵^{\varphi(۲^{۵})} \overset{۲^{۵}}{\equiv} ۱$$

در واقع، $\varphi(۲^{۵}) = ۲^{۴}$ برابر با تعداد اعداد فرد کوچک‌تر از $۲^{۵}$ است. در این‌جا باید نمای $۵^{۵^{۵}}$ را به پیمانه‌ی $۱۶ = ۲^{۴}$ ساده کرد. اما هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$$۵ \overset{۴}{\equiv} ۱ \;;\; ۵^{۵} \overset{۴}{\equiv} ۱ \;,\; ۵^{۵^{۵}} \overset{۸}{\equiv} ۵ \;,\; ۵^{۵^{۵^{۵}}} \overset{۱۶}{\equiv} ۵$$

پس می‌توان نوشت:

$$M = ۵^{۵} + ۲^{۵}k \quad (k \in Z)$$

چون طرف چپ برابری (M) بر $۵^{۵}$ بخش‌پذیر است، واضح است که K نیز بر $۵^{۵}$ بخش‌پذیر است. به این ترتیب برای یک t خواهیم داشت: $M = ۵^{۵} + ۱۰^{۵}t$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی M به پیمانه‌ی $۱۰^{۵}$ برابر $۵^{۵} = ۳۱۲۵$ است و رقم پنجم از سمت راست M، صفر است.

مسئله‌ی۳: ثابت کنید که معادله‌ی $y^{۲} = x^{۵} - ۴$ جواب صحیحی ندارد (بالکان، ۱۹۹۸).

حل: معادله را به پیمانه‌ی ۱۱ در نظر می‌گیریم و با توجه به قضیه‌ی فرما (اگر a و p نسبت به هم اول باشند، آن‌گاه: $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} ۱$) و هم‌نهشتی‌های زیر:

$$(x^{۵})^{۲} = x^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \text{ یا } ۱ \;;\; x^{۵} \overset{۱۱}{\equiv} -۱ \text{ یا } ۰ \text{ یا } ۱$$

به این نتیجه می‌رسیم که سمت راست معادله‌ی مورد نظر به پیمانه‌ی ۱۱ یکی از عددهای ۶یا۷یا۸ است، در صورتی‌که مربع باقی‌مانده‌ها ($y^{۲}$) به پیمانه‌ی ۱۱ یکی از عددهای ۰، ۱، ۳، ۴، ۵یا۹ خواهد بود. به این ترتیب، برای معادله‌ی مورد نظر هیچ جواب صحیحی وجود نخواهد داشت. در واقع هرگز دو طرف معادله به پیمانه‌ی ۱۱، هم باقی‌مانده نخواهد شد:

$$x^{۵} - ۴ \overset{۱۱}{\not\equiv} y^{۲}$$

تمرین۱. تمام زوج‌های صحیح مثبت (x,y) را بیابید که در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$x^۲ = y!+۲۰۰۱$$

راهنمایی: برای y بزرگ‌تر از ۵، همواره $y!$ بر ۹ بخش‌پذیر است و طرف دوم معادله $(y!+۲۰۰۱)$ به پیمانه‌ی ۹ باقی‌مانده‌ی ۳ را می‌دهد که بدیهی است از نوع باقی‌مانده‌ی درجه‌ی دوم نیست $(x = ۴۵ \;,\; y = ۴)$.

تمرین۲. ثابت کنید که دستگاه معادله‌های زیر هیچ جواب صحیح غیربدیهی ندارد.

$$\begin{cases} x^۲ + ۶y^۲ = z^۲ \\ ۶x^۲ + y^۲ = t^۲ \end{cases}$$

راهنمایی: فرض می‌کنیم که دستگاه جوابی غیرصفر داشته باشد. با تقسیم کردن بر مقسوم‌علیه مشترک x، y، z وt می‌توانیم فرض کنیم که این چهار عدد هیچ مقسوم‌علیه مشترکی ندارند. از جمع دو معادله و کار به پیمانه‌ی ۷ به نتیجه برسید.

مسئله‌ی۴: ثابت کنید که عدد $N = ۱۹^{۱۹}$ را نمی‌توان به‌صورت مجموعی از یک مکعب کامل و توان چهارم کامل نوشت (بخارست، ۱۹۸۶).

حل: در واقع مسئله معادل این است که ثابت کنیم معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد صحیح جواب ندارد:

$$x^۳ + y^۴ = ۱۹^{۱۹} \qquad (۱)$$

با توجه به قضیه‌ی فرما و برابری ۱۲=۳×۴، معادله‌ی (۱) را به پیمانه‌ی ۱۳ درنظر می‌گیریم. چون: $(x^۳)^۴ \overset{۱۳}{\equiv}$ ۱ یا ۰، در نتیجه: $x^۳ \overset{۱۳}{\equiv}$ ۸ یا۱ یا ۰ یا۱- یا ۸-.

از طرف دیگر داریم: $y^۴ \overset{۱۳}{\equiv}$ ۹یا۳یا۱یا۰ (یعنی به پیمانه‌ی ۱۳، یک مکعب، باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۵، ۸و۱۲ و یک توان چهارم باقی‌مانده‌های ۰، ۱، ۳و۹ را خواهند داشت). به این ترتیب، مجموع یک مکعب و یک توان چهارم به پیمانه‌ی ۱۳ هم‌نهشت با ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱و۱۲ خواهد بود و عدد ۷ در این فهرست ظاهر نمی‌شود. هم‌چنین داریم:

$$۱۹^{۱۹} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۹^{۱۲} \times ۱۹^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \times ۶^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۶^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۷$$

و چون: $۱۹^{۱۹} \overset{۱۳}{\equiv} ۷$ و $x^۳ + y^۴ \overset{۱۳}{\equiv} r \neq ۷$، در این‌جا اثبات کامل می‌شود.

تمرین۳. تحقیق کنید که آیا می‌توان عدد $N = ۱۹^{۱۹}$ را به‌صورت مجموعی از یک مکعب کامل، توان چهارم کامل و توان پنجم کامل نوشت؟

راهنمایی: واضح است که در واقع باید معادله‌ی $x^۳ + y^۴ + z^۵ = ۱۹^{۱۹}$ را در Z از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنیم. با توجه به برابری $۶۰ = ۵ \times ۴ \times ۳$، کافی است معادله را به پیمانه‌ی ۶۱ درنظر بگیریم و مانند مسئله‌ی ۴ عمل کنیم (در میدان $Z_{۶۱}$ با مرتبه‌ی ۶۰).

مسئله‌ی۵: اگر p عددی اول و w وn اعدادی صحیح باشند، به‌طوری که داشته باشیم: $۲^p + ۳^p = w^n$، ثابت کنید: $n = ۱$ (ایرلند، ۱۹۹۶).

حل: در حالت $p = ۲$ داریم: $w^n = ۲^۲ + ۳^۲ = ۱۴$ و برابری $n = ۱$ بدیهی است. اگر $p > ۲$، آن‌گاه p عددی فرد است؛ بنابراین:

$$۲^p + ۳^p = (۲+۳)(۲^{p-۱} - ۲^{p-۱} \times ۳ + \dots + ۳^{p-۱}) \;;$$

$$۵ \mid (۲^p + ۳^p)$$

پس در این حالت $۵ \mid w$ و اگر $n > ۱$، آن‌گاه: $۲۵ \mid w^n$، بنابراین:

$$۵ \Big| (۲^{p-۱} - ۲^{p-۱} \times ۳ + \dots + ۳^{p-۱}) = \frac{۲^p + ۳^p}{۲ + ۳} = \lambda$$

چون به ازای هر k داریم: $۳^k \overset{۵}{\equiv} (-۲)^k$، پس می‌توان نوشت:

$$(-۱)^k ۲^{p-k-۱} ۳^k \overset{۵}{\equiv} ۲^{p-۱}$$

با توجه به هم‌نهشتی بالا می‌توان نوشت:

$$\lambda = \frac{۲^p + ۳^p}{۲ + ۳} = ۲^{p-۱} - ۲^{p-۱} \times ۳ + \dots$$

$$+ (-۱)^k ۲^{p-k-۱} ۳^k + \dots + ۳^{p-۱} \overset{۵}{\equiv} (۲^{p-۱})p$$

بنابراین، λ با $p(۲^{p-۱})$ به پیمانه‌ی ۵ هم‌نهشت است، ولی $۵ \mid p(۲^{p-۱})$ و این وقتی ممکن است که: $p = ۵$. اما برای $p = ۵$ داریم: $۲^۵ + ۳^۵ = ۲۷۵$ و در این حالت نیز $n = ۱$.

تمرین۴. مسئله‌ی ۵ را برای برابری‌های زیر تحقیق کنید:

الف) $2^p + 1 = w^n$ ب) $3^p + 4^p = w^n$

ج) $3^p + 4^p + 5^p = w^n$ د) $5^p + 6^p = w^n$

راهنمایی: تحقیق عدم درستی حکم برای (الف)، (ب) و (ج) واضح است؛ به برابری‌های عددی $3^2 = 9 = 1 + 2^3$ ، $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$ و $6^3 = 216 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ توجه کنید. پس کافی است فقط برابری (د) را به طریق حل مسئله‌ی ۵ بررسی کنید.

مسئله‌ی۶: . تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مربع کامل را مشخص کنید (آمریکا، ۱۹۹۵).

حل: می‌دانیم که «مجموع ارقام یک عدد به پیمانه‌ی ۹ با آن عدد هم‌نهشت است».

بنابراین، یک مربع کامل باید به پیمانه‌ی ۹ با ۰، ۱، ۴ یا ۷ هم‌نهشت باشد. نشان می‌دهیم: هر عددی مثل N را که یک باقی‌مانده‌ی درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۹ باشد، می‌توان به عنوان مجموع ارقام یک مربع کامل محسوب کرد. حالت‌های $n = 1$ و $n = 4$ بدیهی هستند. بنابراین فرض می‌شود $n > 4$ و با این فرض، اگر $n = 9m$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام $(10^m - 1)^2 = 10^{2m} - 2\times 10^m + 1$ است که عددی به صورت ۴ ۰...۰ ۹...۹۶ خواهد بود. هم‌چنین اگر $n = 9m + 4$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام $(10^m - 3)^2 = 10^{2m} - 6\times 10^m + 9$ است که عددی به صورت ۹ ۰...۰ ۹...۹۴ خواهد بود. و سرانجام اگر $n = 9m - 2$ ، آن‌گاه n مجموع ارقام زیر است:

$$(10^m - 5)^2 = 10^{2m} - 10^{m+1} + 25$$

که عددی به صورت ۲۵ ۰...۰ ۹...۹۰ خواهد بود.

مسئله‌ی۷: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n\geq 0}$ به این صورت تعریف می‌شود: a_0 یک عدد گویای مثبت کوچک‌تر از $\sqrt{1998}$ است و اگر به ازای اعداد صحیح نسبت به هم اول p_n و q_n ، $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ باشد، آن‌گاه: $a_{n+1} = \frac{p_n^2 + 5}{p_n q_n}$. ثابت کنید که برای هر n داریم: $a_n < \sqrt{1998}$ (IMO، ۱۹۹۸).

حل: کافی است نشان دهیم که اگر: $\frac{p}{q} < \sqrt{1998}$ ، آن‌گاه: $\frac{p}{q} + \frac{5}{pq} < \sqrt{1998}$.

از فرض $\frac{p}{q} < \sqrt{1998}$ ، نتیجه می‌شود $(p,q > 0)$:

$$\frac{p^2}{q^2} < 1998 \ ; \ p^2 < 1998q^2 \ ; \ 1998q^2 - p^2 > 0$$

در نظر می‌گیریم: $n = 1998q^2 - p^2$ و نشان می‌دهیم که: $n \notin \{1,2,\dots,10\}$ ، به طوری که اگر $n > 0$ ، آن‌گاه: $n \geq 11$.

با توجه به برابری $1998 = 2\times 27\times 37$:

$$n \overset{9}{\equiv} -p^2 \overset{9}{\equiv} 0,-1,-4,-7$$

بنابراین: $n \neq 1,3,4,6,7,10$. اکنون کافی است $n = 2,5,8$ را منفی کنیم که به پیمانه‌ی ۳۷ این کار را انجام می‌دهیم (قضیه فرما: $((a,p) = 1 \ ; \ a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1)$:

$$n = 2 \ , \ p = 37 \ : \ 1 \overset{37}{\equiv} p^{36} \overset{37}{\equiv} (p^2)^{18} \overset{37}{\equiv} (-2)^{18} \overset{37}{\equiv} 6^2 \overset{37}{\equiv} -1$$
(تناقض)

$$n = 5 \ , \ p = 37 \ : \ 1 \overset{37}{\equiv} p^{36} \overset{37}{\equiv} (p^2)^{18} \overset{37}{\equiv} (-5)^{18} \overset{37}{\equiv} 11^3 \overset{37}{\equiv} -1$$
(تناقض)

$$n = 8 \ , \ p = 37 \ : \ 1 \overset{37}{\equiv} p^{36} \overset{37}{\equiv} (p^2)^{18} \overset{37}{\equiv} (-8)^{18} \overset{37}{\equiv} (-10)^9 \overset{37}{\equiv} -1$$
(تناقض)

بنابراین در این جا ثابت می‌شود: $n \geq 11$ ، به‌طوری که برای $p > 5$:

$$p^2(1998q^2) \geq p^2(p^2 + 11) = p^4 + 11p^2 = p^4 + 10p^2$$
$$+ p^2 > p^4 + 10p^2 + 25$$

پس می‌توان نوشت:

$$1998p^2q^2 > (p^2 + 5^2)^2$$

و یا:

$$\sqrt{1998} > \frac{p}{q} + \frac{5}{pq}$$

برای $p \leq 5$ داریم: $\frac{p}{q} + \frac{5}{pq} \leq \frac{10}{q} < \sqrt{1998}$ و به این ترتیب برقراری حکم واضح است. لازم به ذکر است که $n = 11$ ، کوچک‌ترین مقداری است که نمی‌تواند توسط هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۹۹۸ منفی شود؛ چون: $1998 \mid (787)^2 + 11$. از طرف دیگر، با بسط کسر مسلسل $\sqrt{1998}$ ، می‌توان نشان داد که کوچک‌ترین مقدار دست یافتنی $n = 26$ است که به ازای $p = 134$ و $q = 3$ واقع می‌شود.

مسئله‌ی۸: ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن‌ها برابری:

$$x^2 + 3xy - 2y^2 = 112$$

برقرار باشد (پوتنام، ۱۹۵۴).

حل: ابتدا معادله را به یک معادله‌ی ساده از نوع پل ($x^2 - Ry^2 = 1$) تبدیل می‌کنیم:

$$4(x^2 + 3xy - 2y^2) = 4(112)$$
$$(4x^2 + 12xy + 9y^2) - 17y^2 = 448$$
$$(2x + 3y)^2 - 17y^2 = 448$$

اکنون معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ ساده می‌کنیم. باقی‌مانده‌های درجه‌ی دوم به پیمانه‌ی ۱۷ برابر ۰، ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۸، ۲، ۱۵ و ۱۳ هستند، در حالی که داریم:

$$448 \overset{17}{\equiv} 6$$

چون عدد ۴۴۸ نمی‌تواند اختلاف یک مربع و مضربی از ۱۷ باشد، معادله هیچ جواب صحیحی ندارد.

مسئله‌ی ۹: اگر n عددی صحیح بزرگ‌تر از ۱ باشد، احکام زیر را ثابت کنید:

الف) $k = 1! + 2! + \cdots + n!$ یک توان کامل است، اگر و تنها اگر: $n = 3$.

ب) $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3$ یک توان کامل است، اگر و تنها اگر: $n = 3$.

حل: بدیهی است که به ازای $n = 3$ داریم: $S = (1!)^3 + (2!)^3 + (3!)^3 = 15^2$ و $k = 1! + 2! + 3! = 3^2$.

اکنون باید نشان دهیم که این تنها امکان است. به این منظور فرض می‌کنیم که n دیگری وجود دارد که برای $m > 1$: $k = 1! + 2! + \cdots + n! = t^m$.

از طریق آزمایش می‌توان نشان داد که n باید بزرگ‌تر یا برابر با ۹ باشد. برای $n \ge 5$، عدد k به ۳ ختم می‌شود و به این ترتیب m نمی‌تواند برابر با ۲ باشد (می‌دانیم که مربع‌ها تنها می‌توانند به ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ ختم شوند) و این مطلب یعنی: $n \ge 3$. هم‌چنین، برای $n \ge 9$ عبارت k بر ۳ بخش‌پذیر است و در نتیجه: $3 \mid t$ و یا $27 \mid t^m$. بنابراین، باید $27 \mid k$. ولی چون !n به ازای $n \ge 9$ بر ۲۷ بخش‌پذیر است:

$$n \ge 9:\ k = 1! + 2! + \cdots + n! \overset{27}{\equiv} 1! + 2! + \cdots + 8! \overset{27}{\equiv} 9$$

این تناقض ثابت می‌کند که $n = 3$ تنها جواب مسئله است.

به همین ترتیب، عبارت $S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3$ یک توان کامل برای $n = 2,4,5,6$ نیست. برای $n \ge 7$، چون: $49 \mid n!$، پس:

$$S = (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (n!)^3 \overset{49}{\equiv} (1!)^3 + (2!)^3 + \cdots + (6!)^3 \overset{49}{\equiv} 7$$

چون ۷ باقی‌مانده‌ی یک توان کامل نیست، بنابراین $n = 3$، تنها جواب مسئله است.

تمرین ۵. تحقیق کنید که عبارت $T = (1!)^2 + (2!)^2 + \cdots + (n!)^2$ به ازای چه مقادیری از n مربع کامل است.

تمرین ۶. تحقیق کنید که آیا به ازای $n > 1$، عبارت زیر می‌تواند توان کامل شود:

$$M = (1!)^5 + (2!)^5 + \cdots + (n!)^5$$

مسئله‌ی ۱۰: می‌دانیم:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab000000$$

رقم‌های a، b، c و d را تعیین کنید (انگلستان، ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲).

حل: می‌دانیم اگر n عدد طبیعی و $n \le 1$ عددی اول باشد، تعداد عامل‌های p در !n از دستور $t_p = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots$ تعیین می‌شود. چون تعداد صفرهای !n بستگی به تعداد ۵های موجود در آن دارد، پس تعداد صفرهای سمت راست !n برابر با $t_5 = \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{25} \right\rfloor + \cdots = 7$ است و در نتیجه: $b = 0$.

از طرف دیگر، اگر صفرهای سمت راست !۳۴ را حذف کنیم، عدد حاصل یعنی $\frac{34!}{10^7}$ بر ۸ بخش‌پذیر است (زیرا: $2^{t_2} \mid 34!$ و $t_2 = \left\lfloor \frac{34}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{4} \right\rfloor + \cdots = 32$). بنابراین عدد سه‌رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{35a}$، باید بر ۸ بخش‌پذیر و زوج باشد. پس a می‌تواند یکی از اعداد زوج بین صفر و ۱۰ باشد که با امتحان این چهار عدد، فقط عدد ۳۵۲ بر ۸ بخش‌پذیر است و در نتیجه: $a = 2$.

برای یافتن c و d توجه می‌کنیم که !۳۴ باید بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد. از بخش‌پذیری آن بر ۹ نتیجه می‌شود که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر است و با یک محاسبه‌ی ساده به دست می‌آید: $c + d = 9k - 6$،

$141 + c + d \overset{9}{\equiv} 6 + c + d \overset{9}{\equiv} 0$ چون: $0 \le c + d \le 18$، پس: $k = 1$ یا ۲. بنابراین: $c + d = 3$ یا ۱۲ (*)

(c و d) = (۰,۳) یا (۱,۲) یا (۲,۱) یا (۳,۰) یا (۳,۹) یا (۴,۸) یا (۵,۷) یا (۶,۶) یا

(حالت‌های ممکن: $c + d = 3$ یا ۱۲)

(۳و۹) یا (۴و۸) یا (۵و۷) هم‌چنین، می‌دانیم عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که داشته باشیم:

$$(k\ \text{زوج})\quad \overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + \cdots + a_{k-1} - a_k$$

$$(k\ \text{فرد})\quad \overline{a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0} \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + \cdots - a_{k-1} + a_k$$

بنابراین، چون عدد !۳۴ دارای ۳۹ رقم است (k=۳۹)،

پس:
$$34! \overset{11}{\equiv} 0 - 0 + d - c + \cdots + 2 = 19 + d - c$$

$$\overset{11}{\equiv} d - c - 3 \overset{11}{\equiv} 0\ ;$$

$$d - c \overset{11}{\equiv} 3\ ;\ d - c = 11s + 3\ ,$$

$$0 \le d - c \le 8\ ;\ d - c = 3$$

تنها جوابی که در این شرایط صدق می‌کند، $d = 3$ و $c = 0$ است.

تمرین۷. می‌دانیم:

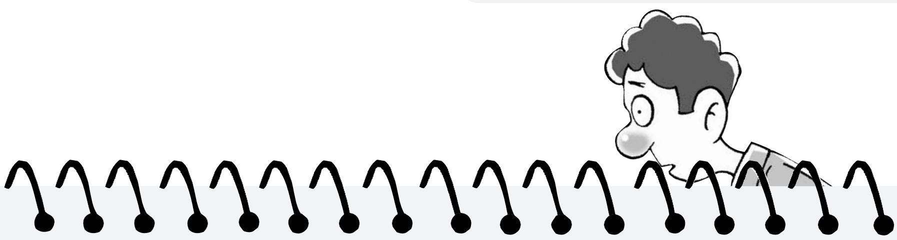
$$34! = 2a52327aadea6b414b847618 6\,ba6435cb \times 10^6$$

رقم‌های a، b، c، d، e را تعیین کنید.

راهنمایی: با توجه به ارقام حاصل !۳۴، بدیهی است که عدد تکراری a فقط ۰ یا ۹ می‌تواند باشد؛ زیرا بقیه‌ی عددها در طرف دوم دیده می‌شوند و حداقل دو بار هم تکرار شده‌اند. a غیر از ۹ نمی‌تواند باشد، زیرا نشان می‌دهیم که !۳۴ به هفت صفر ختم می‌شود و در واقع عدد b نیز صفر است. می‌دانیم که صفرهای !n، در واقع از ضرب عامل‌های ۵و۲ حاصل می‌شوند. بدیهی است که تعداد صفرهای !۳۴ همان تعداد ۵های موجود در !۳۴ است:

$$t_5 = \left\lfloor \frac{34}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{34}{25} \right\rfloor = 6 + 1 = 7$$

بنابراین هفت رقم سمت راست !۳۴ صفر است. برای تعیین c از خاصیت بخش‌پذیری بر ۸ و برای تعیین d و e از خاصیت بخش‌پذیری بر ۹ و ۱۱ (مطابق مسئله‌ی ۱۰) استفاده می‌کنیم.



تمرین

۱. اگر $N = 4444$، A مجموع ارقام عدد N^{N^N}، B مجموع ارقام A و C مجموع ارقام B باشد، مجموع ارقام C را بیابید.

۲. رقم پنجم از سمت راست عدد $M = 5^{5^{555}} + 25! + 99999^{55555} - 1$ را تعیین کنید.

۳. تحقیق کنید که آیا معادله‌ی $2y^2 = x^5 - 128$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح دارای جواب است؟

۴. تمام زوج‌های صحیح مثبت (x,y) را بیابید که در معادله‌ی زوبه‌رو صدق کنند: $2025x^2 - 2001 = (4y)!$

۵. تحقیق کنید که آیا دستگاه زیر جواب صحیح غیربدیهی دارد؟

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 2z^2 \\ 24x^2 + y^2 = 4t^2 \end{cases}$$

۶. تحقیق کنید که آیا عدد $N = 19^{19}$ می‌تواند به صورت مجموعی از یک مربع کامل و یک مکعب کامل نوشته شود؟

۷. اگر p عددی اول و w و n اعدادی صحیح باشند، به‌طوری که داشته باشیم: $6^p + 7^p = w^n$
تحقیق کنید که n برابر با چه عددهایی می‌تواند باشد.

۸. تمام مقادیر ممکن برای مجموع ارقام یک مکعب کامل را مشخص کنید.

۹. ثابت کنید که اعداد صحیح x و y وجود ندارند که برای آن‌ها برابری زیر برقرار باشد: $2x^2 + 3xy - y^2 = 56$

۱۰. به ازای چه مقادیری از n، عبارت N یک توان کامل است؟ $N = (1!)^4 + (2!)^4 + \cdots + (n!)^4$