

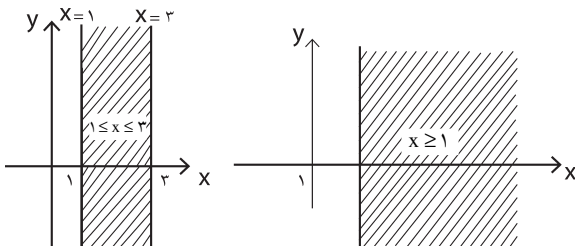
اشاره:

در این مقاله می‌کوشیم، با استفاده از دانسته‌ها و توانایی‌های شما درباره‌ی حل معادله‌ها و نامعادله‌های یک یا دو متغیره، نوعی سرگرمی آموزشی ارائه کنیم که با انجام آن، مهارتتان در رسم نمودار این گونه رابطه‌ها تقویت شود. در کلاس‌های درس، معمولاً معادله‌ها یا نامعادله‌ها را می‌دهند و از شما می‌خواهند نمودار آن‌ها را رسم کنید. ما در این جا علاوه بر این کار، قصد داریم به صورت عکس هم عمل کنیم؛ یعنی نمودار را به شما می‌دهیم و می‌خواهیم که معادله یا نامعادله‌ی مربوط به آن را بنویسید.

به این منظور، با استفاده از رابطه‌های (معادله‌ها و نامعادله‌ها) ریاضی حرف‌های یک کلمه را طراحی می‌کنیم. برای نمونه، شما می‌توانید نام خود را روی یک کاغذ شطرنجی به شکل دل‌خواه طراحی کنید؛ سپس برای هر قطعه از حروف کلمه‌ی نام خود، رابطه‌های ریاضی را بنویسید. وقتی تمام رابطه‌های ریاضی را برای حرف‌های نامتان نوشتید، آن‌گاه دستگاهی از معادله‌ها و نامعادله‌ها را خواهید داشت که با رسم آن‌ها، طراحی نامتان را خواهید دید.

طراحی با رابطه‌های ریاضی

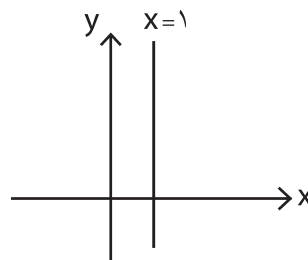
در زیر، مجموعه جواب نامعادله‌های $x \geq 1$ و $1 \leq x \leq 3$ را رسم کرده‌ایم:



نمودار ۴

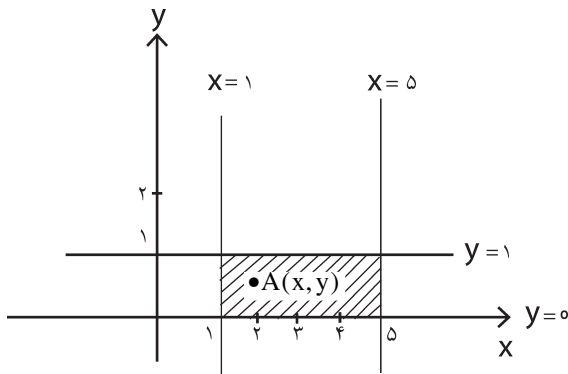
نمودار ۳

تا کنون در دوره‌ی متوسطه با رسم معادله‌ها و نامعادله‌های جبری آشنا شده‌اید. برای نمونه می‌دانید که نمودار معادله‌ی $x = 1$ ، خطی موازی محور y ‌هاست (نمودار ۱).



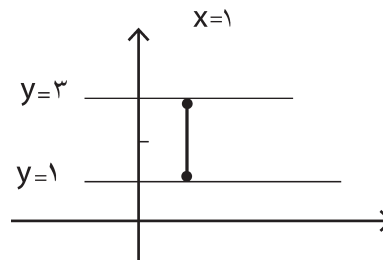
نمودار ۱

با اطلاعات به دست آمده، نامعادله‌هایی را بنویسید که مجموعه جواب آن‌ها سطح مستطیل شکل زیر باشد.

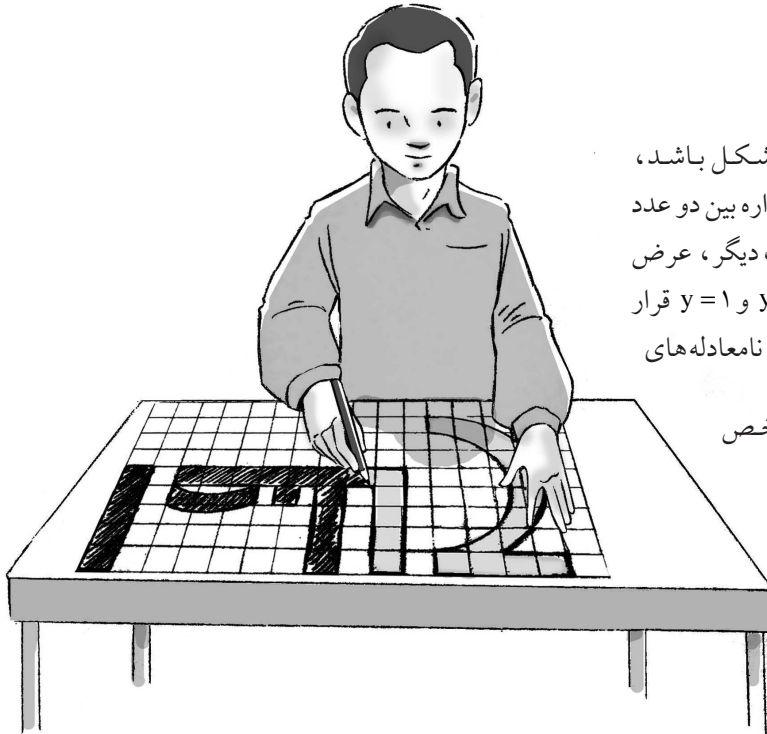


نمودار ۵

چنان‌که نمودار معادله‌ی $x = 1$ را با شرط $1 \leq y \leq 3$ رسم کنیم، یک پاره‌خط موازی محور y ‌ها به دست می‌آید (نمودار ۲).



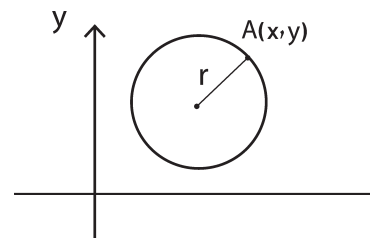
نمودار ۲



اگر $A(x, y)$ نقطه‌ای از سطح مستطیل شکل باشد،
ملاحظه می‌کنید که طول این نقطه، یعنی x همواره بین دو عدد
۱ و ۵ قرار دارد؛ بنابراین: $1 \leq x \leq 5$. از طرف دیگر، عرض
این نقطه یعنی y بین دو خط به معادله‌های $y = 0$ و $y = 1$ قرار
دارد؛ پس: $0 \leq y \leq 1$. در نتیجه، نمودار دستگاه نامعادله‌های

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$
 این سطح مستطیل شکل را مشخص
می‌کند.

معادله‌ی $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ مجموعه نقاط روی یک دایره به مرکز
 $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کند.
زیرا فاصله‌ی نقطه‌ی S مرکز دایره تا نقطه‌ی
دلخواه $A(x, y)$ روی دایره، همواره برابر
با r است (نمودار ۶).



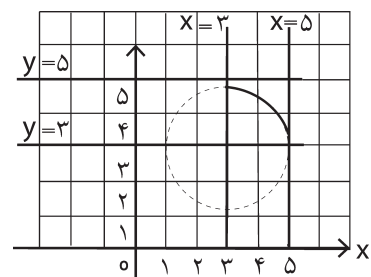
نمودار ۶

نامعادله‌های زیر به ترتیب مجموعه نقاط درون و برون دایره
به مرکز $S(\alpha, \beta)$ و شعاع r را مشخص می‌کنند.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 > r^2$$

با توجه به مطالب گفته شده، سعی کنید رابطه‌ای بنویسید
که مجموعه جواب آن، نقاط روی ربع دایره به صورت زیر
باشد.



نمودار ۷

با توجه به نمودار، ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره،
قسمتی از دایره‌ی به مرکز $S(3, 3)$ و شعاع $r = 2$ است.
بنابراین، معادله‌ی این دایره به صورت زیر است:

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

اما این ربع دایره بین دو خط به معادله‌های $y = 3$ و $y = 5$ قرار
دارد. بنابراین دستگاه زیر می‌تواند بیان‌کننده‌ی این نمودار باشد.

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ 3 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

از طرف دیگر ملاحظه می‌کنیم که این ربع دایره بین دو خط
 $x = 3$ و $x = 5$ نیز قرار دارد. بنابراین نمودار دستگاه زیر
مشخص‌کننده‌ی این ربع دایره است:

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 4 \\ 3 \leq y \leq 5 \\ 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

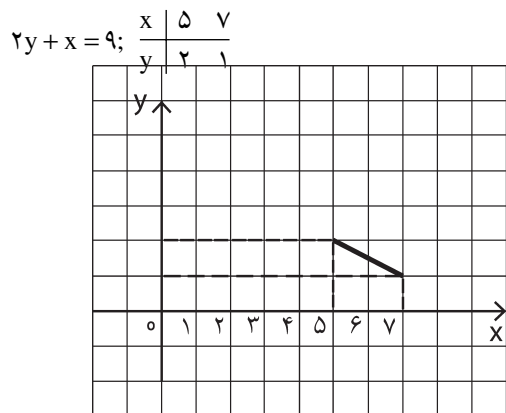
(برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی رسم نامعادله‌ها می‌توانید به مجله‌ی
ریاضی‌رشد برهان متوسطه، شماره‌ی ۶۱، بهار ۱۳۸۸ مراجعه کنید.)

طرح ۱. نمودار رابطه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات

رسم کنید.

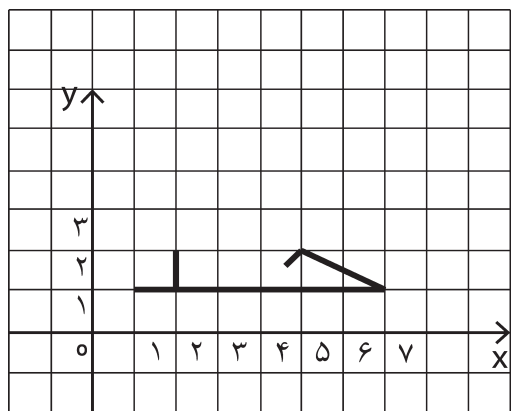
$$\begin{cases} y = 1; 1 \leq x \leq 7 & (1) \\ x = 2; 1 \leq y \leq 2 & (2) \\ y = x - 3; 4/5 \leq x \leq 5 & (3) \\ 2y + x = 9; 5 \leq x \leq 7 & (4) \end{cases}$$

رابطه‌ی «۴» قسمتی از خط به معادله‌ی $2y + x = 9$ است که مختص x آن‌ها بین ۵ و ۷ است (نمودار ۱۱).



نمودار ۱۱

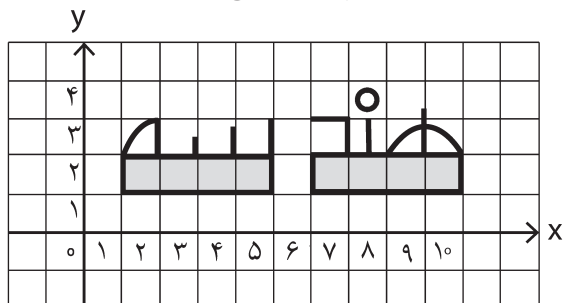
اکنون نمودارهای ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



نمودار ۱۲

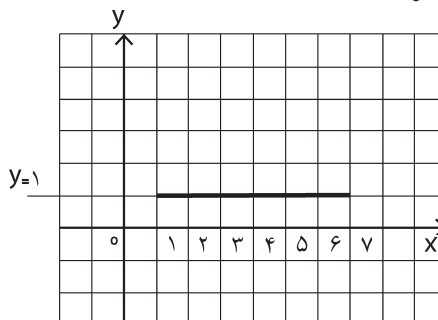
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با رسم نمودار رابطه‌ها، کلمه‌ی «حد» را طراحی کرده‌ایم (مفهوم حد در کتاب‌های ریاضی سال سوم متوسطه آمده است).

طرح ۲. روی کاغذ شطرنجی، کلمه‌ی هندسه را به این صورت طراحی کرده‌ایم (نمودار ۱۳). رابطه‌هایی جبری بنویسید که پس از رسم آن‌ها، طرح زیر به دست آید.



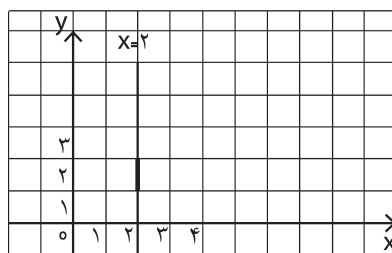
نمودار ۱۳

رابطه‌ی «۱» پاره خطی موازی محور x ‌ها است. برای رسم نمودار آن، ابتدا خط به معادله‌ی $y = 1$ را رسم می‌کنیم. سپس قطعه‌ای از آن را که مختص x بین ۱ و ۷ است، جدا می‌کنیم. (نمودار ۸)



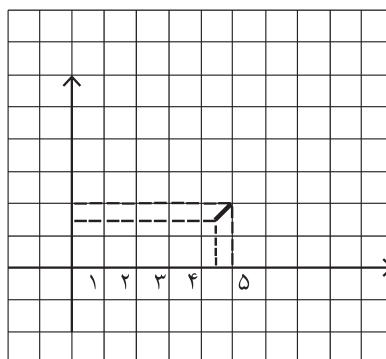
نمودار ۸

رابطه‌ی «۲» پاره خطی موازی محور y ‌ها است که طول آن برابر یک واحد است (نمودار ۹).



نمودار ۹

رابطه‌ی «۳» قسمتی از خط به معادله‌ی $y = x - 3$ است که مختص x آن‌ها بین ۴/۵ و ۵ است. برای رسم این پاره خط در معادله‌ی $y = x - 3$ یک بار $x = 4/5$ را قرار می‌دهیم و مقدار y را می‌یابیم. بار دیگر $x = 5$ را قرار می‌دهیم و y را پیدا می‌کنیم. سپس به کمک دو نقطه‌ی ابتدا و انتهای پاره خط، نمودار آن را رسم می‌کنیم (نمودار ۱۰).



$$y = x - 3; \begin{array}{c|c} x & 4/5 \quad 5 \\ \hline y & -11/5 \quad 2 \end{array}$$

نمودار ۱۰

هم چنین پاره خط هایی که نمایش حرف «س» را طراحی می کنند، موازی محور y ها و معادله هایشان چنین اند:

$$\begin{cases} x=5 & ; 2 \leq y \leq 3 \\ x=4 & ; 2 \leq y \leq 2\frac{3}{4} \\ x=3 & ; 2 \leq y \leq 2\frac{1}{4} \end{cases} \quad (8)$$

و اما آخرین دستگاہی که مشخص کننده ی حرف «ه» آخر در کلمه ی هندسه است، از یک ربع دایره و پاره خط تشکیل شده است. ربع دایره، قسمتی از دایره به مرکز $(2, 2)$ و شعاع یک است که بین دو خط افقی $y=2$ و $y=3$ و هم چنین بین دو خط عمودی $x=1$ و $x=2$ قرار دارد. پاره خط به کار رفته در حرف «ه»، موازی محور y است و بین دو خط $y=2$ و $y=3$ قرار دارد. بنابراین:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad (9)$$

$x=2$; $2 \leq y \leq 3$ (10)
اکنون اگر معادله ها و نامعادله های نوشته شده از رابطه های ۳ تا ۱۰ را در یک دستگاه بنویسیم، نمودار این دستگاه، واژه ی هندسه را طراحی می کند.

از آن جا که رهبر معظم انقلاب اسلامی امسال را با عنوان «اصلاح الگوی مصرف» نام گذاری کرده است، با رابطه های ریاضی، عبارت «اصلاح الگوی مصرف» را با قلم (فونت) دل خواه طراحی کنید و معادله ها و نامعادله های مربوط به آن را بنویسید و برای ما بفرستید. هیئت تحریریه ی مجله ی رشد برهان متوسطه، پس از بررسی آثار رسیده، بهترین ها را در مجله به چاپ می رساند و برای طراحان آن ها جوایز ویژه ای ارسال خواهد کرد.

بعد از طراحی این عبارت و نوشتن رابطه های ریاضی مربوط به آن، متوجه خواهید شد که طراحی این عبارت به صرف وقت و نوشتن رابطه های ریاضی آن به ظرافت و دقت خاصی نیاز دارد. پس متناظر با آن هم اکنون فکر کنید و با مدتی صرف وقت، طوری برنامه های زندگی و درسی خود را تدوین کنید که این امر در زندگی روزمره ی شما محقق شوند.

در این طراحی دو سطح مستطیل شکل وجود دارد: یکی زیر «هند» که رابطه ی آن مطابق نمودار ۵ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (1)$$

و دیگری سطح مستطیل شکل زیر «سه» که به طور مشابه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (2)$$

رابطه های ۱ و ۲ را به طور خلاصه می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad (3)$$

حرف «ه» در این طرح از یک نیم دایره و یک پاره خط تشکیل شده است. نیم دایره، قسمتی از یک دایره به مرکز $S(9, 2)$ و شعاع یک است که بین دو خط افقی $y=2$ و $y=3$ قرار دارد. بنابراین مشابه نمودار ۷ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} (x-9)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases} \quad (4)$$

پاره خطی که در حرف «ه» وجود دارد، موازی محور y ها است که رابطه ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=9 \\ 2 \leq y \leq 3\frac{1}{3} \end{cases} \quad (5)$$

نقطه ی حرف «ن» دایره ای به مرکز $S'(7/5, 3/5)$ و شعاع $\frac{1}{4}$ است که رابطه ی آن به این صورت زیر است:

$$(x-7/5)^2 + (y-3/5)^2 = \frac{1}{16} \quad (6)$$

پاره خط هایی که مشخص کننده ی دو حرف «ن» و «د» هستند، معادله هایشان به این صورت اند:

$$\begin{cases} x=7/5; 2 \leq y \leq 3 \\ x=7 & ; 2 \leq y \leq 3 \\ y=3 & ; 6 \leq x \leq 7 \end{cases} \quad (7)$$