حمیدرضا امیری

قضیه‌ی تقسیم

اشاره:
در این قسمت و با بیان خواص رابطه‌ی بخش‌پذیری (عادکردن) روی Z در دو قسمت قبل، به بررسی قضیه‌ی تقسیم و نتایجِ حاصل از آن می‌پردازیم:

قضیه‌ی تقسیم: به ازای هر عدد صحیح مانند a و هر عدد طبیعی مانند b، همواره دو عدد صحیح و منحصر به فرد مانند r و q یافت می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \le r < b$.

اثبات قضیه‌ی تقسیم را با روشی بیان می‌کنیم که تا حدی با روش اثبات در کتاب درسی متفاوت است:

برهان: دنباله‌ی اعداد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\dots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \dots$$

واضح است که هر عدد صحیح مانند a، همواره بین دو عضو متوالی از این دنباله قرار خواهد گرفت! یعنی عددی صحیح مانند q یافت می‌شود، به قسمی که $qb \le a < (q+1)b$. با اضافه کردن $-qb$ به طرفین نابرابری خواهیم داشت: $0 \le a - qb < b$ که اگر فرض کنیم $\underbrace{r = a - bq}_{a = bq + r}$، در این صورت داریم: $a = bq + r$. بنابراین قسمت اولِ قضیه یعنی وجود r و q در Z که در رابطه‌های $a = bq + r$ و $0 \le r < b$ صدق کنند، به اثبات رسید. اثبات یکتایی r و q همان اثبات کتاب درسی است!

توجه: از این به بعد در مسائل، a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

بیان و اثبات چند قضیه‌ی مقدماتی (لِم)

لِم ۱: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را در عددی ضرب کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم در آن عدد ضرب می‌شود و خارج قسمت تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$ تقسیم عدد صحیح و دل‌خواه a بر عدد طبیعی b باشد و q خارج قسمت و r باقی‌مانده. در این صورت داریم:

$$a = bq + r$$
$$\Rightarrow ka = k(bq) + kr$$
$$\Rightarrow ka = (kb)q + kr$$

واضح است که q خارج قسمت تقسیم ka بر kb است و kr باقی‌مانده.

$$(0 \le r < b \Rightarrow 0 \le kr < kb)$$

تذکر: لِم ۱ در حالتی که مقسوم و مقسوم‌علیه بر k بخش‌پذیر باشند و نیز برای تقسیم آن‌ها بر k، برقرار است (به عنوان تمرین ثابت کنید.)

لِم ۲: اگر در یک تقسیم k برابر مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، در این صورت خارج قسمت با عدد k جمع می‌شود و باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$. در این صورت:

$$a = bq + r \Rightarrow a + kb = bq + kb + r$$

$$\Rightarrow (a + kb) = b(\underbrace{q + k}_{q'}) + r$$

لِم ۳: برای به دست آوردن خارج قسمتِ تقسیم یک عدد بر حاصل ضربِ چند عدد، کافی است آن عدد را بر یکی از عامل‌های ضرب، تقسیم کنیم. خارج قسمتِ حاصل را هم بر یکی دیگر از عوامل تقسیم کنیم و این عمل را ادامه دهیم تا آخرین عاملِ ضرب که آخرین خارج قسمت همان خارج قسمت مطلوب است.

فرض کنیم می‌خواهیم خارج قسمت ۴۵۰ را بر $۵\times۳\times۷$ بیابیم.

$$۴۵۰=۵\times۹۰,\ \ ۹۰=۳\times۳۰,\ \ ۳۰=۷\times۴+۲\Rightarrow q=۴$$

$$۴۵۰=(۷\times۳\times۵)\times۴+۳۰\Rightarrow q'=۴$$

(مشاهده می‌کنید که $q=q'=۴$)

برهان: لِم ۳ را در حالت تقسیم عدد a بر bc بررسی می‌کنیم. برای حالتی که a بر حاصل ضرب n عدد تقسیم شود نیز به طریق مشابه می‌توان عمل کرد:

(۱) $a=bq+r,\ \ ۰\le r<b$: ابتدا a را بر b تقسیم می‌کنیم

(۲) $q=cq_۱+r_۱,\ \ ۰\le r_۱<c$: سپس q را بر c تقسیم می‌کنیم

اگر q را از رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a=b(cq_۱+r_۱)+r\Rightarrow a=bcq_۱+(br_۱+r)$$

حال کافی است ثابت کنیم: $br_۱+r_۲<bc$. در این صورت حکم به دست می‌آید و $q_۱$ یعنی آخرین خارج قسمت، همان خارج قسمت مطلوب است.

$$r<b\Rightarrow r\le b-۱$$

$$r_۱<c\Rightarrow r_۱\le c-۱\Rightarrow br_۱\le bc-b$$

$$\xRightarrow{\text{جمع طرفین نامساوی}} r+br_۱\le(b-۱)+(bc-b)\Rightarrow br_۱+r\le bc-۱$$

$$\Rightarrow br_۱+r<bc$$

یک مطلب جالب!

در هر تقسیم، تعداد ارقام خارج قسمت برابر است با حداقل تعداد صفرهایی که باید در جلوی مقسوم‌علیه قرار دهیم تا عدد حاصل از مقسوم بزرگ‌تر شود.

مثال: در تقسیم ۷۶ بر ۶، خارج قسمت دو رقمی است، زیرا اگر حداقل دو صفر جلوی ۶ قرار دهیم، در این صورت حاصل یعنی ۶۰۰ از ۷۶ بزرگ‌تر می‌شود. در صورتی که خارج قسمت تقسیم ۷۶ بر ۸، یک رقمی است. زیرا با قراردادن تنها یک صفر جلوی ۸، عدد حاصل از ۷۶ بزرگ‌تر می‌شود.

لِم ۴: بزرگ‌ترین عددی که می‌توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند (با ثابت ماندن مقسوم علیه) برابر است با $(b-r-۱)$.

برهان: اگر به طرفین رابطه‌ی $a=bq+r$ عدد n را اضافه کنیم، خواهیم داشت $a+n=bq+n+r$. حال اگر $(a+n)$ را مقسوم و b را همان مقسوم‌علیه و q را خارج قسمت فرض کنیم و $r'=(n+r)$ باقی مانده باشد، باید $n+۱<b$ یا $n<b-۱$ باشد که حداقل مقدار برای آن $n=b-r-۱$ است.

لِم ۵: در تقسیم $a=bq+r$ حداکثر $\left[\frac{r}{q}\right]$ واحد می‌توان به مقسوم‌علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.

برهان:

$$a=bq+r\Rightarrow a=(b+x)q+r'$$

$$\Rightarrow bq+r=(b+x)q+r'\Rightarrow r'=r-xq,\ \ r'\ge۰$$

$$\Rightarrow r-xq\ge۰\Rightarrow xq\le r\Rightarrow x\le\frac{r}{q}\Rightarrow x_{max}=\left[\frac{r}{q}\right]$$

مسئله‌ی ۱: در یک تقسیم، اگر ۴۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه و از باقی مانده ۴ واحد کم می‌شود. مقسوم‌علیه را بیابید.

حل: فرض $a=bq+r$

$$a+۴۱=b(q+۵)+r-۴\Rightarrow a+۴۱=\underbrace{bq+r}_{a}+۵b-۴$$

$$\Rightarrow ۵b=۴۵\Rightarrow \underline{b=۹}$$

مسئله‌ی ۲: چه تعداد عدد طبیعی مانند a یافت می‌شود که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۹۸، از سه برابر مربع خارج قسمت ۴ واحد کمتر باشد (بزرگ‌ترین آن‌ها کدام است)؟

حل: طبق قضیه‌ی تقسیم، اگر q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a=۱۹۸q+r\ ,\ r<۱۹۸\ ,\ r=۳q^۲-۴$$

$$\Rightarrow ۳q^۲-۴<۱۹۸ \Rightarrow ۳q^۲<۲۰۲ \Rightarrow q^۲<\frac{۲۰۲}{۳}$$

$$\Rightarrow q^۲\le\left[\frac{۲۰۲}{۳}\right]=۶۷ \Rightarrow q\le\left[\sqrt{۶۷}\right] \Rightarrow q\le ۸$$

$$\text{اگر}\ \begin{cases} q=۰ \Rightarrow r=-۴ \\ q=۱ \Rightarrow r=-۱ \end{cases} \Rightarrow q\ne ۰,۱,\ \ ۲\le q\le ۸$$

بنابراین برای q، هفت مقدار وجود دارد که به ازای $q=۸$ بزرگ‌ترین مقدار برای a به دست می‌آید.

$$q=۸ \Rightarrow r=۳\times۸^۲-۴=۱۸۸\ ,\ a=۱۹۸\times۸+۱۸۸=۱۷۷۲$$

مسئله‌ی ۳: در یک تقسیم، مقسوم علیه ۸ و باقی مانده ۵ است. اگر ۳۲ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم، خارج قسمت چه تغییری می‌کند و باقی مانده چه عددی است؟

حل: طبق لِم ۲، چون چهار برابر مقسوم‌علیه با مقسوم جمع شده است، خارج قسمت با عدد ۴ جمع می‌شود و خارج قسمت جدید به دست می‌آید. باقی مانده تغییر نمی‌کند و همان عدد ۵ است.

مسئله‌ی ۴: در یک تقسیم، مقسوم ۱۲ برابر باقی مانده است و باقی مانده ۲ واحد از حداکثر مقدار خود کمتر است. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

حل: طبق فرض مسئله، اگر $a=bq+r$، در این صورت $a=۱۲r$ و $r=b-۱-۲$.

$$a=bq+r \Rightarrow ۱۲r=bq+r \Rightarrow ۱۲(b-۳)=bq+b-۳$$

$$\Rightarrow ۱۲b-۳۶=bq+b-۳ \Rightarrow ۱۱b-bq=۳۳$$

$$\Rightarrow b(۱۱-q)=۳\times۱۱ \Rightarrow \begin{cases} b=۱۱ \Rightarrow r=b-۳=۱۱-۳=۸ \\ ۱۱-q=۳ \Rightarrow q=۸ \end{cases}$$

$$a=۱۲r \Rightarrow a=۱۲\times۸=۹۶$$

(توجه دارید که اگر $۱۱-q=۱۱$، در این صورت $q=۰$ که نتیجه می‌دهد $a=۰$. در این صورت عددی طبیعی به دست نمی‌آید.)

مسئله‌ی ۵: اگر باقی مانده‌های تقسیم a و b بر ۲۵ به‌ترتیب ۱۹ و ۱۷ باشند، باقی مانده‌ی تقسیم $(۳a-۵b)$ را بر ۲۵ بیابید.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a=۲۵q_۱+۱۹ \\ b=۲۵q_۲+۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a=۳\times۲۵q_۱+۵۷ \\ ۵b=۵\times۲۵q_۲+۸۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳a-۵b=۲۵(\underbrace{۳q_۱-۵q_۲}_{q\in Z})+۵۷-۸۵=۲۵q-۲۸$$

$$\Rightarrow (۳a-۵b)=۲۵q-۲۸=۲۵q-۵۰+۲۲=۲۵(\overbrace{q-۲}^{q'\in Z})+۲۲$$

$$\Rightarrow (۳a-۵b)=۲۵q'+۲۲ \Rightarrow \text{باقیمانده}=r=۲۲$$

(توجه دارید که باقی مانده‌ی هر تقسیمی، همواره عددی نامنفی است.)

مسئله‌ی ۶: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح k بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید همواره باقی مانده‌ی تقسیم نیز بر k بخش‌پذیر خواهد بود.

حل: روش اول:

$$a=bq+r\ ,\ \ k|a,\ \ k|b \Rightarrow a=kq_۱\ ,\ \ b=kq_۲$$

$$\Rightarrow kq_۱=(kq_۲)q+r \Rightarrow r=k(\underbrace{q_۱-q_۲q}_{q'}) \Rightarrow k|r$$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} k|a \\ k|b \rightarrow k|bq \end{array}\right\} \Rightarrow k|a-bq \Rightarrow a|r$$

مسئله‌ی ۷: باقی مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۶ هستند، باقی مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a=۷q_۱+۵ \\ b=۸q_۲+۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸a=۵۶q_۱+۴۰ \\ ۷b=۵۶q_۲+۴۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۸a-۷b)=۵۶(\underbrace{q_۱-q_۲}_{q\in Z})+(۴۰-۴۲)$$

$$\Rightarrow a=۵۶q-۲ \Rightarrow r=۵۴$$

(برای یافتن $r=۵۴$ مانند مسئله‌ی ۵ عمل کنید.)

مسئله‌ی ۸: باقی مانده‌های تقسیم عدد a بر دو عدد ۵ و ۷، به ترتیب ۳ و ۵ هستند، باقی مانده‌ی تقسیم a را بر ۳۵ بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{array}{l} ۱۴ \\ ۱۵ \end{array}\begin{cases} a=۵q_۱+۳ \\ q=۷q_۲+۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۴a=۱۴\times۵q_۱+۴۲ \\ ۱۵a=۱۵\times۷q_۲+۷۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۱۵a-۱۴a)=۳۵(۳q_۲-۲q_۱)+۳۳ \Rightarrow r=۳۳$$

(توجه دارید که برای ضرب در هر تساوی اعدادی متوالی لازم داریم که یکی عاملِ ۷ و دیگری عامل ۵ داشته باشد که ۱۴ و ۱۵ واجد این شرایط هستند.)

مسئله‌ی ۹: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر با ۱۲

و $۲۱|a+۱۷$ است. در این صورت کمترین مقدار را برای a بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a=۲۹q+۱۲ \\ a+۱۷=۲۱q' \end{cases} \Rightarrow ۲۹q+۱۲=۲۱q'-۱۷$$

$$\Rightarrow ۲۱q'=۲۹q+۱۲+۱۷=۲۹q+۲۹=۲۹(\overbrace{q+۱}^{q_۱\in Z})$$

$$\Rightarrow ۲۱q'=۲۹q_۱ \Rightarrow \frac{۲۱}{۲۹}=\frac{q_۱}{q'} \overset{a_{min}}{\Rightarrow} q_۱=۲۱,\ \ q'=۲۹$$

از طرف دیگر:

$$a+۱۷=۲۱q' \Rightarrow a=۲۱q'-۱۷=۲۱\times۲۹-۱۷=۵۹۲$$

مسئله‌ی ۱۰: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، به طوری که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۲۵، عدد ۱۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\frac{a+۳}{۲}$ بر ۲۵ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم: $a=۲۵q+۱۷$. و چون a فرد است. پس باید q عددی زوج باشد (چرا؟) بنابراین داریم:

$$q=۲k \Rightarrow a=۲۵\times۲k+۱۷ \Rightarrow a+۳=۲۵\times۲k+۱۷+۳$$

$$\Rightarrow \frac{a+۳}{۲}=۲۵k+\frac{۲۰}{۲} \Rightarrow \frac{a+۳}{۲}=۲۵k+۱۰ \Rightarrow r=۱۰$$

مسئله‌ی ۱۱: در یک تقسیم، مقسوم ۵۲۵ و باقی‌مانده ۲۵ است. اگر مقسوم‌علیه، مجذور دو برابر خارج قسمت باشد، خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$۵۲۵=bq+۲۵,\ \ b=(۲q)^۲=۴q^۲$$

$$\Rightarrow ۵۲۵=۴q^۲\times q+۲۵ \Rightarrow ۴q^۳=۵۰۰ \Rightarrow q^۳=۱۲۵ \Rightarrow q=۵$$

مسئله‌ی ۱۲: اگر a و b اعداد طبیعی و $b\neq ۱$ باشد و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b را r بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر $-b$ را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله و قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$a=bq+r,\ \ ۰\le r<b \Rightarrow b-r>۰$$

$$-a=-bq-r \Rightarrow -a=-bq-r+\underbrace{b-b}_{۰}$$

$$\Rightarrow -a=-b(q+۱)+b-r$$

اگر فرض کنیم: $r'=b-r$، دیدیم که $b-r>۰$. واضح است که $b-r<|b|$. بنابراین باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر $-b$ عدد $(b-r)$ است.

مسئله‌ی ۱۳: اگر در یک تقسیم، خارج قسمت را از مقسوم و مقسوم‌علیه کم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و ۲۰ واحد به باقی‌مانده اضافه می‌شود. خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$a=bq+r,\ \ a-q=(b-q)q+r+۲۰$$

$$\Rightarrow a-q=bq-q^۲+r+۲۰$$

$$\overset{a=bq+r}{\Rightarrow} \cancel{bq}+\cancel{r}-q=\cancel{bq}-q^۲+\cancel{r}+۲۰$$

$$\Rightarrow -q^۲+q+۲۰=۰ \Rightarrow (q-۵)(q+۴)=۰$$

$\Rightarrow q=۵$ یا $q=-۴$

مسئله‌ی ۱۴: چند عدد طبیعی بین ۷۰۰ و ۱۱۰۰ وجود دارد که اگر آن‌ها را بر ۱۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم و خارج قسمت آن، مساوی باشند؟

حل: اگر عدد مورد نظر را a فرض کنیم، داریم: $۷۰۰<a<۱۱۰۰$ و $a=۱۴۳q+r$ و $r=q$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$۷۰۰<۱۴۳q+q<۱۱۰۰ \Rightarrow ۷۰۰<۱۴۴q<۱۱۰۰$$

$$\Rightarrow ۴/۸۶<q<۷/۶۳$$

$\overset{q\in Z}{\Rightarrow} ۵\le q\le ۷ \Rightarrow q=۵$ یا $q=۶$ یا $q=۷$

بنابراین سه عدد طبیعی وجود دارد.

مسئله‌ی ۱۵: مجموعه ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی را بیابید که مضرب ۱۳ و مربع آن نیز بر ۳۱۵ بخش‌پذیر باشد.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$n=۱۳k,\ \ ۳۱۵|n^۲,\ \ ۳۱۵=۳^۲\times۵\times۷$$

$$۳۱۵|n^۲ \Rightarrow \frac{n^۲}{۳۱۵}\in Z \Rightarrow \frac{n^۲}{۳^۲\times۵\times۷}\in Z \Rightarrow \frac{۱۶۹k^۲}{۳^۲\times۵\times۷}\in Z$$

$$\xRightarrow{\text{۱۶۹ فقط عامل ۱۳ دارد}} k_{min}=۳\times۵\times۷=۱۰۵$$

$$\Rightarrow n_{min}=۱۳\times۱۰۵=۱۳۶۵$$

مجموع ارقام $=۱+۳+۶+۵=۱۵$

مسئله‌ی ۱۶: مجموع سه عدد ۷۱ است. اگر اولی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت ۲ و باقی‌مانده ۱ می‌شود و اگر سومی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت ۳ و باقی‌مانده ۴ می‌شود. این سه عدد را بیابید.

حل: اگر عدد اول را a، دومی را b و سومی را c فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a+b+c=۷۱ \\ a=۲b+۱ \\ c=۳b+۴ \end{cases} \Rightarrow (۲b+۱)+b+(۳b+۴)=۷۱$$

$$\Rightarrow ۶b=۶۶ \Rightarrow b=۱۱ \Rightarrow \begin{cases} a=۲\times۱۱+۱=۲۳ \\ c=۳\times۱۱+۴=۳۷ \end{cases}$$