۵
دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

۱ ـ ۵

مقدمه

مسائلی که انسان در واقعیت با آن‌ها سروکار دارد، معمولاً دارای ابهام و نوعی عدم قطعیت هستند که به پیچیدگی در آن‌ها می‌انجامد. برای آن‌که بتوان موضوعی را به‌طور کامل تحلیل کرد، باید اطلاعات کافی و دقیق از آن داشت. ولی انسان در مواجهه با مسائل پیچیده در دنیای واقعی، چون اطلاعات دقیقی از آن‌ها ندارد، به شکل تقریبی ماهیت آن‌ها را تحلیل می‌کند. در این خصوص، پروفسور لطفی‌زاده، بنیان‌گذار منطق و مجموعه‌های فازی بیان کرده است: «هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد، پیچیدگی آن سیستم کاهش پیدا می‌کند و درک و تحلیل از آن افزایش می‌یابد. وقتی پیچیدگی سیستم کاهش یابد، دقت روش مدل‌سازی افزایش می‌یابد و ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم فراهم می‌شود.»

برای سیستم‌هایی که پیچیدگی کمی دارند، چون میزان عدم قطعیت در آن‌ها کم است، می‌توان با استفاده از روابط ریاضی، رفتار آن‌ها را به شکل دقیق مدل‌سازی و تحلیل کرد. ولی اگر سیستم قدری پیچیده شود، عدم قطعیت افزایش می‌یابد. در این حالت نمی‌توان تحلیل دقیقی از آن به عمل آورد. به منظور تحلیل مناسبی از این نوع سیستم‌ها، از رویکرد استدلال تقریبی فازی استفاده می‌شود. به همین لحاظ، به آن‌ها سیستم‌های «فازی» می‌گویند.

ورودی سیستم‌های فازی، اطلاعاتی فازی یا غیردقیق هستند، یا آن‌که بررسی سیستم براساس استدلال تقریبی و به شکل فازی و غیردقیق صورت می‌گیرد. نظریه‌ی فازی که به بررسی مفاهیم غیردقیق می‌پردازد، دارای چهار بخش متفاوت است که عبارت‌اند از: ریاضی فازی، منطق و سیستم‌های فازی، تصمیم‌گیری فازی و هوش مصنوعی. ریاضی فازی به بررسی مجموعه‌های فازی و اعمال روی آن‌ها می‌پردازد و همان‌گونه که در قسمت‌های قبل اشاره شد، عضویت یک عنصر در یک مجموعه‌ی فازی، با عددی موسوم به درجه‌ی عضویت بیان می‌شود که مقداری بین صفر و یک است. منطق فازی توسعه یافته‌ی منطق کلاسیک است که در آن به جای منطق دو ارزشی، از منطق چند ارزشی استفاده می‌شود. در تصمیم‌گیری فازی پارامترها، تابع هدف و قیود مسئله به شکل فازی هستند.

از جمله کاربردهای مهم نظریه‌ی فازی، در هوش مصنوعی و طراحی و ساخت ربات‌های هوشمند است که می‌توان با پردازش فازی، امکان انجام رفتارهایی شبیه انسان را در آن‌ها طراحی کرد.

در قسمت‌های قبل، مفاهیمی چون مجموعه‌ی فازی محدب، عدد فازی و اعمال روی مجموعه‌های فازی معرفی شدند. در این قسمت، ابتدا چند مفهوم در مجموعه‌های فازی را مطرح می‌کنیم:

تعریف: منظور از «ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی»، بزرگ‌ترین مقدار درجه‌ی عضویت در آن مجموعه است. ارتفاع مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را با $h(\tilde{A})$ نمایش می‌دهیم. به این ترتیب:

$$h(\tilde{A})=\max_{x\in X}\mu_{\tilde{A}}(x)$$

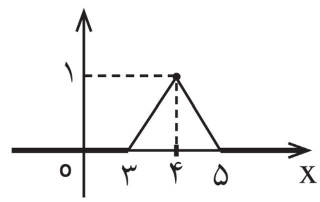
در صورتی که ارتفاع یک مجموعه‌ی فازی ۱ باشد، آن مجموعه‌ی فازی را نرمال و در غیر این صورت غیرنرمال می‌گویند. بنابراین اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال باشد، آن‌گاه:

$$\exists x\in X,\ \mu_{\tilde{A}}(x)=1$$

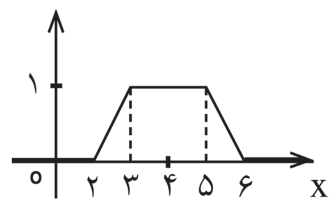
زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع X که مقدار درجه‌ی عضویت اعضای این مجموعه ۱ باشد، «هسته‌ی مجموعه‌ی فازی» $\tilde{A}$ نام دارد. هسته‌ی $\tilde{A}$ را با $\mathrm{Core}(\tilde{A})$ نمایش می‌دهند. لذا:

$$\mathrm{Core}(\tilde{A})=\left\{x\in X \;\middle|\; \mu_{\tilde{A}}(x)=۱\right\}$$

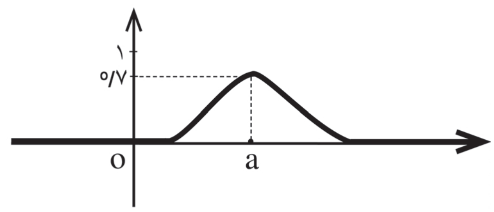
شکل‌های زیر، توابع عضویت نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی فازی نرمال و غیرنرمال را نمایش می‌دهند. در هر یک از آن‌ها هسته و ارتفاع مشخص شده‌اند.



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A})=۱$ و $\mathrm{Core}(\tilde{A})=\{۴\}$



مجموعه‌ی فازی نرمال با $h(\tilde{A})=۱$ و $\mathrm{Core}(\tilde{A})=[۳,۵]$



مجموعه‌ی فازی غیرنرمال با $h(\tilde{A})=۰/۷$ و $\mathrm{Core}(\tilde{A})=\phi$

هم‌چنین، اگر:

$\tilde{A}=\{(۲,۰/۳),(۳,۰/۶),(۴,۱),(۵,۱),(۷,۰/۸),(۹,۰/۴)\}$ ،

آن‌گاه: $h(\tilde{A})=۱$ و $\mathrm{Core}(\tilde{A})=\{۴,۵\}$. بنابراین، $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمالی را نمایش می‌دهد.

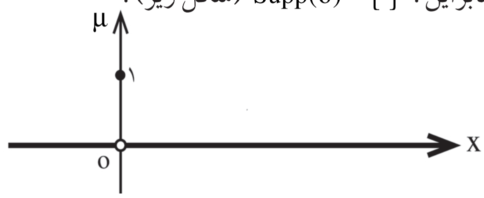
مفهوم دیگری که در مجموعه‌های فازی مطرح می‌شود، «مجموعه‌ی فازی سینگلتون» است که به مجموعه‌ی فازی با تکیه‌گاه یک عضوی اطلاق می‌شود. بنابراین، $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی سینگلتون نام دارد، هرگاه:

$\mathrm{Supp}(\tilde{A})=\{a\}$

برای مثال، منظور از صفر سینگلتون، مجموعه‌ای فازی با این تابع عضویت است:

$$\mu_{\tilde{o}}(x)=\begin{cases}۱ & x=۰\\ ۰ & x\neq ۰\end{cases}$$

بنابراین: $\mathrm{Supp}(\tilde{o})=\{۰\}$ (شکل زیر).



در قسمت قبل، تعریفی از اعداد فازی مطرح شد که **زیمرمن**[1] ارائه داده است. پس از آن، تعریف عدد فازی، به صورت زیر کامل شد:

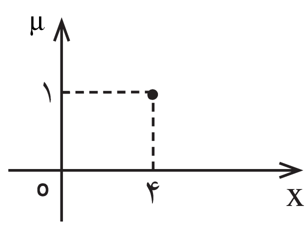
تعریف: مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را عدد فازی گوییم هرگاه:

الف) $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی نرمال باشد؛

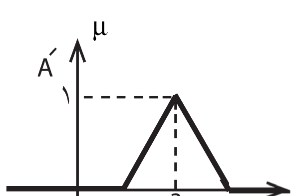
ب) مجموعه‌ی α– برش $\tilde{A}$، یعنی A_α برای هر $۱\geq\alpha>۰$. بازه‌ای بسته باشد؛

ج) تکیه‌گاه $\tilde{A}$ مجموعه‌ای کران‌دار باشد.

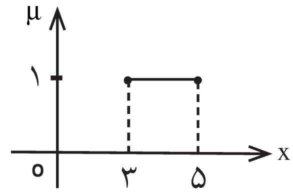
بنابر تعریف بالا، چون α– برش یک عدد فازی برای هر $۱\geq\alpha>۰$، مجموعه‌ای بسته، و هر مجموعه‌ی بسته، مجموعه‌ای محدب است، بنابراین هر عدد فازی یک مجموعه‌ی فازی محدب است. ولی عکس این حالت برقرار نیست. یعنی می‌توان مجموعه‌ی فازی محدبی را مثال زد که یک α– برش آن باز یا نیم‌باز باشد. شکل‌های زیر، نمونه‌هایی از تابع عضویت یک عدد فازی را بیان می‌کنند. توجه می‌کنیم که اعداد حقیقی و بازه‌های حقیقی، حالات خاصی از اعداد فازی هستند.



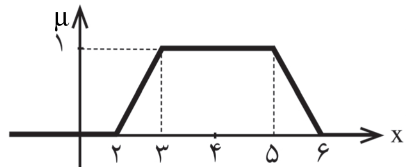
۱ یک عدد حقیقی قطعی (عدد ۴)



۲ یک عدد حقیقی فازی (تقریباً ۴)

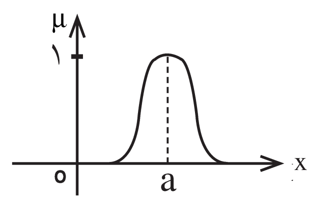


۳ یک بازه‌ی بسته‌ی حقیقی قطعی (بازه‌ی [۳,۵])

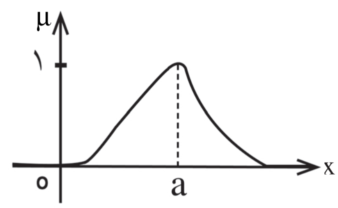


۴ یک بازه‌ی حقیقی فازی (تقریباً بین ۳ و ۵)

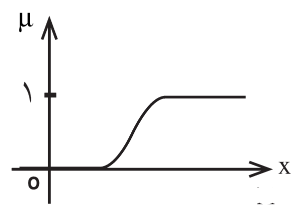
تابع عضویت هر عدد فازی، لزوماً همانند شکل‌های بالا متقارن نیست. به نمونه‌های زیر از اعداد فازی توجه کنید:



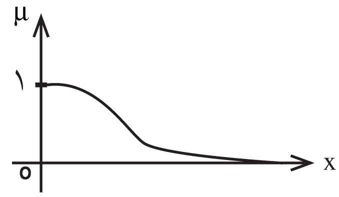
۱ یک عدد فازی زنگی شکل متقارن



۲ یک عدد فازی زنگی شکل غیرمتقارن



۳ اعداد بزرگ



۴ اعداد کوچک

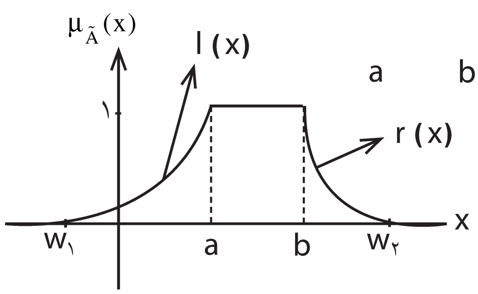
مشاهده می‌کنیم، تابع عضویت هر عدد فازی می‌تواند صعودی یا نزولی باشد. با توجه به تعریف عدد فازی، می‌توان قضیه‌ی زیر را بیان کرد:

قضیه: اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی روی $\mathbb{R}$ باشد، آن‌گاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی است اگر و تنها اگر بازه‌ی بسته‌ی غیرتهی نظیر $[a,b]$ وجود داشته باشد که:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} ۱ & a \leq x \leq b \\ l(x) & x < a \\ r(x) & x > b \end{cases}$$

که در آن l تابعی از $(-\infty,a)$ به $[۰,۱]$، صعودی و از راست پیوسته است و به ازای $x \in (-\infty, w_۱]$ ، $w_۱ \leq a$ ، $l(x) = ۰$ ، r تابعی از $(b,+\infty)$ به $[۰,۱]$، نزولی و از چپ پیوسته است و به ازای $x \in [w_۲,+\infty)$ ، $b \leq w_۲$ داریم: $r(x) = ۰$.

در شکل زیر، توابع l و r در قضیه به نمایش گذاشته شده‌اند:



نمونه‌ای از یک عدد فازی با هسته‌ی $[a,b]$

چون مجموعه‌های فازی با α- برش‌های خود مشخص می‌شوند، می‌توان با انجام محاسبات روی α- برش‌ها، اعمال ریاضی روی اعداد فازی را برحسب اعمال ریاضی روی α- برش‌های آن‌ها معرفی کرد. در این جا اعمال اصلی در بازه‌ها را معرفی می‌کنیم. خواص و جزئیات اعمال بازه‌ای در

مبحثی با عنوان «حساب بازه‌ای» بررسی می‌شود. در ادامه، اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو بازه‌ی حقیقی، هم‌چنین قرینه و وارون بازه‌ی فازی معرفی می‌شوند:

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$$
$$-[a,b]=[-b,-a]$$
$$[a,b]-[c,d]=[a,b]+(-[c,d])=[a-d,b-c]$$

با فرض آن‌که: $۰\notin[a,b]$

$$[a,b]^{-۱}=\left[\frac{۱}{b},\frac{۱}{a}\right]$$
$$[a,b]\times[c,d]=\left[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}\right]$$

با فرض $۰\notin[c,d]$

$$[a,b]/[c,d]=[a,b]\times[c,d]^{-۱}=[a,b]\times\left[\frac{۱}{d},\frac{۱}{c}\right]$$
$$=\left[\min\left\{\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right\},\max\left\{\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right\}\right]$$

مثال:

$$[۲,۶]+[۱,۴]=[۳,۱۰] \qquad -[-۷,۲]=[-۲,۷]$$
$$[۲,۶]-[۱,۴]=[-۲,۵] \qquad [۲,۶]^{-۱}=\left[\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۲}\right]$$
$$[-۲,۲]\times[-۳,-۰/۵]=[-۶,۶]$$
$$[-۱,۳]/[۲,۵]=\left[\frac{-۱}{۲},\frac{۳}{۲}\right]$$

حال فرض کنید، می‌خواهیم تابع عضویت مجموع و تفاضل دو عدد فازی مثلثی شکل $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با توابع عضویت زیر را به دست آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le -۱\ ,\ x>۳\\ \frac{x+۱}{۲} & -۱\le x\le ۱\\ \frac{۳-x}{۲} & ۱<x\le ۳\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le ۱\ ,\ x>۵\\ \frac{x-۱}{۲} & ۱\le x\le ۳\\ \frac{۵-x}{۲} & ۳<x\le ۵\end{cases}$$

در این حالت، مجموعه‌های α- برش عبارت‌اند از:

$$A_\alpha=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]\ ,\ ۰\le\alpha\le ۱$$
$$B_\alpha=[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha]\ ,\ ۰<\alpha\le ۱$$

با توجه به جمع و تفریق بازه‌های فازی خواهیم داشت:

$$(A+B)_\alpha=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]+[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha]$$
$$=[۴\alpha,۸-۴\alpha]\ ,\ ۰<\alpha\le ۱$$
$$(A-B)_\alpha=[۲\alpha-۱,۳-۲\alpha]-[۲\alpha+۱,۵-۲\alpha]$$
$$=[۴\alpha-۶,۲-۴\alpha]\ ,\ ۰<\alpha\le ۱$$

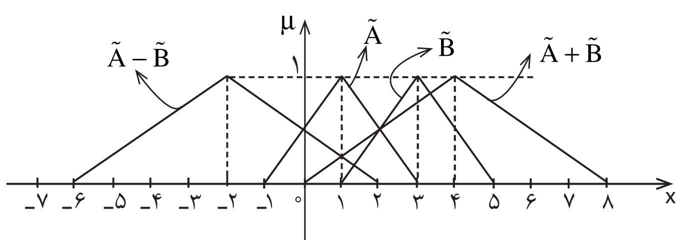
حال از روی مجموعه‌های α- برش فوق توابع عضویت $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ را به دست می‌آوریم. فرض کنیم: $x\in(A+B)_\alpha$ لذا $۴\alpha\le x\le ۸-۴\alpha$ و از آن‌جا $\frac{x}{۴}\ge\alpha$ به ازای $۴\le x<۰$ و $\alpha\ge\frac{۸-x}{۴}$ به ازای $۸\le x<۴$. بنابراین:

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le ۰\ ,\ x>۸\\ \frac{x}{۴} & ۰<x\le ۴\\ \frac{۸-x}{۴} & ۴<x\le ۸\end{cases}$$

به طور مشابه:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x)=\begin{cases}۰ & x\le -۶\ ,\ x>۲\\ \frac{x+۶}{۴} & -۶<x\le -۲\\ \frac{۲-x}{۴} & -۲<x\le ۲\end{cases}$$

شکل زیر، توابع عضویت $\tilde{A}$، $\tilde{B}$، $\tilde{A}+\tilde{B}$ و $\tilde{A}-\tilde{B}$ را نمایش می‌دهد.



حال سؤالات زیر را مطرح می‌کنیم:

- آیا حاصل تقریباً ۳+ تقریباً ۱ برابر با تقریباً ۴ می‌شود؟
- آیا رابطه‌ی تقریباً ۳= تقریباً ۱+ (تقریباً ۱ـ تقریباً ۳) صحیح است؟

دو تابع عضویت مثال بالا، توصیفی از اعداد فازی تقریباً ۱ و تقریباً ۳ را نمایش می‌دهند. با توجه به تابع عضویت $\tilde{A}+\tilde{B}$، پاسخ سؤال اول مثبت است. مجموعه‌ی α- برش $(A+B)_\alpha$ به ازای چند α خاص در زیر آمده است:

$$(A+B)_\alpha=\begin{cases}[۱/۲,۶/۸] & \alpha=۰/۳\\ [۲/۸,۵/۲] & \alpha=۰/۷\\ ۴ & \alpha=۱\end{cases}$$

ولی پاسخ سؤال دوم منفی است. رابطه‌ی فوق صحیح نیست. علت اصلی برقرار نبودن این رابطه از تعریف تفریق دو بازه‌ی حقیقی ناشی می‌شود. در مثال فوق، مجموعه‌ی $\alpha -$ برش عدد فازی «تقریباً ۱ـ تقریباً ۳» عبارت است از قرینه‌ی مجموعه‌ی $\alpha -$ برش عدد فازی «تقریباً ۳ـ تقریباً ۱»؛ یعنی قرینه‌ی بازه‌ی $[4\alpha - 6, 2 - 4\alpha]$.

بنابراین: $1 \geq \alpha > 0$ و $[4\alpha - 2, 6 - 4\alpha] =$ (تقریباً ۱ـ تقریباً ۳)$_\alpha$

حال این بازه با بازه‌ی $[2\alpha - 1, 3 - 2\alpha] =$ (تقریباً ۱)$_\alpha$ جمع می‌شود. بنابراین:

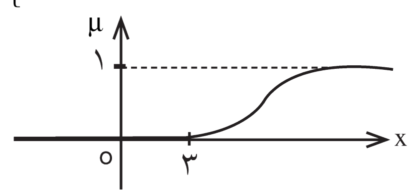
$1 \geq \alpha > 0$ و $[6\alpha - 3, 9 - 6\alpha] =$ (تقریباً ۱)$_\alpha +$ (تقریباً ۱ـ تقریباً ۳)$_\alpha$

مجموعه‌ی $\alpha -$ برش حاصل با مجموعه‌ی $\alpha -$ برش عدد فازی تقریباً ۳، یعنی B_α متفاوت است.

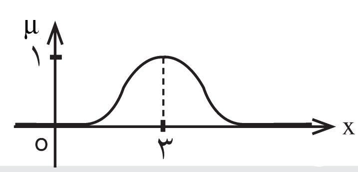
در انتها چگونگی حل تمرین‌هایی را که در مقاله‌ی قبل مطرح شدند، شرح می‌دهیم.

در سؤال اول، تابع عضویت قسمت الف می‌تواند به صورت $\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-(x-3)^2}$ معرفی شود. قسمت ب معرف یک عدد فازی ذوزنقه‌ای یا یک بازه‌ی فازی با هسته‌ی $[1,3]$ است که می‌توانید آن را در رابطه‌ی کلی ارائه شده برای تابع عضویت این نوع از اعداد فازی جای‌گذاری کنید. تابع عضویت برای قسمت ج سؤال را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2} & x > 3 \\ 0 & x \leq 3 \end{cases}$$



۱ نمودار تابع عضویت $\tilde{C}$



۲ نمودار تابع عضویت $\tilde{A}$

به منظور بررسی محدب بودن $\tilde{A}$ در سؤال ۲، به این صورت عمل می‌کنم (در صورت سؤال، توان ۲ در مخرج کسر تایپ نشده است که در این حل اصلاح گردیده است):

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \Rightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-10}\right)^2} \geq \alpha \Rightarrow 1+\left(\frac{1}{x+10}\right)^2 \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x-10}\right)^2 \leq \frac{1-\alpha}{\alpha} \Rightarrow (x-10)^2 \geq \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow |x-10| \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

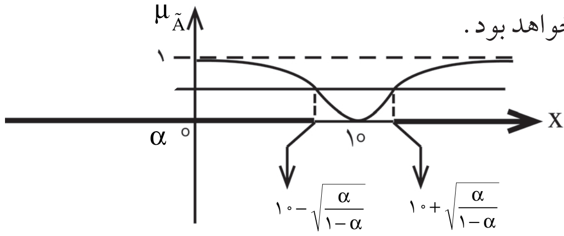
$$\text{یا } x-10 \leq -\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \geq 10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x-10 \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow x-10 \geq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \text{ یا } x \leq 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow x \leq 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

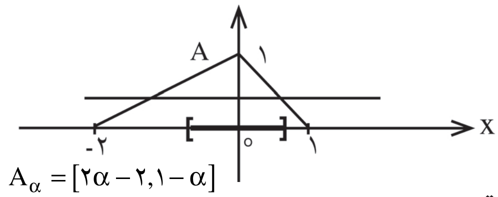
$$\text{یا } x \geq 10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow A_\alpha = \left(-\infty, 10-\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] \cup \left[10+\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, +\infty\right)$$

نمودار زیر توصیفی از تابع عضویت $\tilde{A}$ و $\alpha -$ برش آن است. ملاحظه می‌کنیم، A_α محدب نیست، لذا $\tilde{A}$ محدب نخواهد بود.



این عدد فازی می‌تواند بیانگر مفهوم فازی خیلی دور از ۱۰ باشد. مجموعه‌ی $\alpha -$ برش قسمت دوم $B_\alpha = \left[10-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\ ,\ 10+\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right]$ است که مجموعه‌ای محدب است. بنابراین $\tilde{B}$ محدب است. سؤال سوم مشابه سؤال حل شده در مقاله‌ی قبل حل می‌شود. در مورد سؤال چهارم، به شکل زیر توجه کنید که $\mu_{\tilde{A}}$ را نمایش می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که $\tilde{A}$ یک عدد فازی نه مثبت و نه منفی است. این عدد فازی توصیفی از تقریباً ۱ را ارائه می‌دهد.



پاورقی

1. Zimmermann

منابع

۱. شوندی، حسن. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت. انتشارات گسترش علوم پایه. چاپ اول. ۱۳۸۵.
۲. منهاج، محمدباقر. محاسبات فازی. انتشارات دانش نگار. چاپ اول. ۱۳۸۶.
3. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, theory and applications, G. J. Klir and B. Yuan, Prentice Hall of India, 1995.