● پرویز شهریاری

ریاضیات در ایران ۵

محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی (سده‌ی سوم)

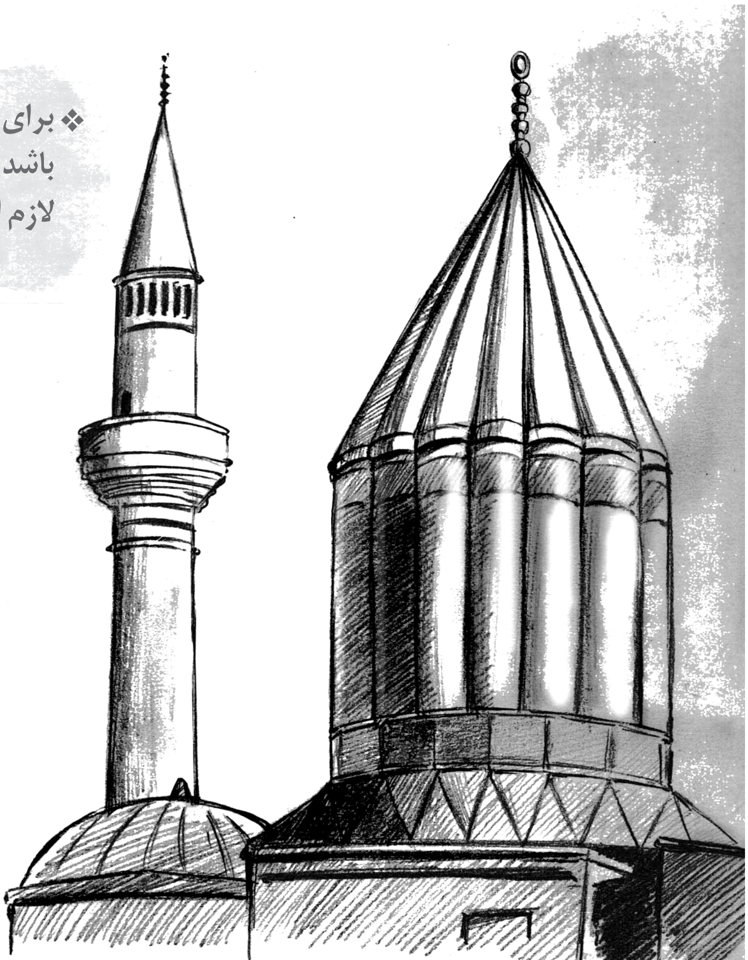
خوارزمی و کتاب جبر و مقابله

«جبر و مقابله»ی **خوارزمی** مهم‌ترین کتابی است که محمد فرزند موسی خوارزمی در زمینه‌ی جبر نوشته و آن را ادامه‌ی حساب نامیده است. واژه‌ی جبر که خوارزمی برای نامیدن این دانش برگزیده، معرف روشی است که او در کتاب خود، آن را به‌کار برده است. خوارزمی جبر را به معنای جبران کردن (که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند: سعدی) می‌دانست که به زبان امروزی به معنای جابه‌جایی عددی منفی از یک طرف معادله به طرف دیگر و تبدیل آن به عددی مثبت است. کنار واژه‌ی «جبر»، به واژه‌ی «مقابله» برمی‌خوریم که نشان‌دهنده‌ی عمل دیگری در حل معادله است: مقابل هم قرار دادن جمله‌ی برابر در دو سوی معادله.

بهاءالدین عاملی معروف به **شیخ بهایی**، ریاضی‌دان آغاز سده‌ی یازدهم هجری قمری (سده‌ی شانزدهم میلادی)، دو واژه‌ی جبر و مقابله را این‌طور تعریف کرده است: «می‌توان بخشی از معادله را که شامل مقدار منفی است، حذف کرد و به سمت دیگر و به همان اندازه اضافه کرد. این عمل جبر نامیده می‌شود. جمله‌های متشابه برابر را می‌توان از دو سمت معادله کنار گذاشت. این عمل را هم مقابله گویند».

❖ برای آن که درک از طبیعت درست و عاقلانه باشد، شناسایی ریاضیات و دانش‌های طبیعی لازم است.

«فردریک انگلس»



به کمک آموزه‌های امروزی، این دو عمل را می‌توان به روشنی در نمونه‌ای شرح داد. این معادله را در نظر می‌گیریم:

$$۵x - ۱۳ = ۴x - ۹$$

اگر به دو سمت، برابری ۱۳ و ۹ را بیفزاییم، عمل جبر را انجام داده‌ایم.

$$۵x + ۹ = ۴x + ۱۳$$

اگر از دو سمت برابری، $۴x$ و ۹ را کم کنیم، عمل مقابله را انجام داده‌ایم. در نتیجه داریم: $x=۴$

به این ترتیب، عمل‌های جبر و مقابله

به زبان امروزی عبارت‌اند از: انتقال جمله‌ای از یک سمت معادله به سمت دیگر و سپس جمع جبری جمله‌های متشابه.

در برگردان واژه‌ی جبر به زبان‌های انگلیسی، فرانسه، آلمانی و روسی، حرف اضافه‌ی «ال» را هم گذاشته‌اند و «الجبر» را به کار می‌برند.

در کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی، راه‌حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم شرح داده شده است. کتاب خوارزمی در اساس به روش حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم مربوط می‌شود. به این ترتیب، خوارزمی مسیر اصلی این دانش جدید را مشخص می‌کرد و می‌دانیم، مضمون اصلی جبر، دست کم تا سده‌ی نوزدهم میلادی عبارت است از همین حل معادله‌ها. آقای **خان مهندس** در کتاب «اصول علم جبر و مقابله» که در سال ۳۰۵ هجری قمری چاپ شده است، می‌نویسد:

تعمیم و تشکیل این عمل (یعنی علم حساب) با این همه شرف و تغییر، موقوف است به علم جبر و مقابله و استخراج مجهولات از روی حل معادلات به طریقی که معین و مقرر است. ارزش عملی کار خوارزمی در این است که کتاب او تنها رساله‌ای درباره‌ی حل مسئله‌ها نیست (آن‌طور که در آثار یا نوشته‌های هندی دیده می‌شود)، بلکه خوارزمی به جز حل معادله‌ها، کاربرد آن‌ها را طرح می‌کند و بسیاری از قانون‌ها را با روش هندسی هم روشن می‌سازد.

درست است که خوارزمی برای حل معادله‌ی درجه دوم، به ظاهر راه‌حل کلی نمی‌دهد، ولی ضمن آوردن مثال‌های عددی در برخی حالت‌ها، همان دستوری را دنبال می‌کند که امروز برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌شناسیم.

> ❖ شراره یک لحظه می‌درخشد، ولی نور واقعی هرگز خاموش نمی‌شود.
> «گوته»

مسئله‌ی ۱۳۸ باب هفتم کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی

یک درهم را بر چند مرد بخش کردم، به هر یک چیزی رسید. سپس یک مرد به گرد آنان افزودم و بار دیگر یک درهم را میان آنان بخش کردم. سهم هر یک در بار دوم به اندازه‌ی یک ششم درهم، از مقدار بخش اول کم‌تر شد. در این‌جا خوارزمی می‌خواهد تعداد مردان را در بار اول پیدا کند. راه‌حل او را می‌آوریم:

اگر تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء (x) در نقصانی که میان آنان است $(\frac{۱}{۶})$ ضرب کنی و آن‌گاه حاصل ضرب را در تعداد مردان نوبت‌های اول و دوم ضرب کنی $\left[\frac{۱}{۶}x(x+۱)\right]$، مال بخش شده [یعنی یک درهم] به دست می‌آید: $\left[\frac{۱}{۶}x(x+۱)=۱\right]$. پس از آن، تعداد مردان نوبت اول را که عبارت است از شیء (x)، در یک ششم، که میان آنان اختلاف بود، ضرب کنی، می‌شود یک ششم جذر $(\frac{۱}{۶}x)$. سپس آن را در تعداد مردان نوبت دوم، یعنی شیء به اضافه‌ی یک، ضرب می‌کنی. این نتیجه به دست می‌آید: یک ششم مال به اضافه‌ی یک ششم جذر که تقسیم بر یک درهم برابر است با یک درهم $\left[\frac{۱}{۶}x^۲+\frac{۱}{۶}x=۱\right]$. مالی را که در اختیار داری کامل می‌کنی، یعنی آن را در ۶ ضرب می‌کنی، می‌شود مال به اضافه‌ی جذر $\left[x^۲+x\right]$. پس یک درهم را در شش ضرب می‌کنی، می‌شود شش درهم. حاصل آن یک مال و یک جذر است که برابر است با شش درهم $\left[x^۲+x=۶\right]$. آن‌گاه تعداد جذر را پس از نصف کردن در مانند خودش ضرب کن و آن را بر شش بیفزا $\left[(\frac{۱}{۲})^۲+۶\right]$. جذر حاصل جمع را بگیر و نصف تعداد جذری را که در مانند خودش ضرب کرده بودی و عبارت است از نصف $\frac{۱}{۲}$، از آن کم کن $\left[-\frac{۱}{۲}+\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+۶}\right]$. مانده عبارت است از تعداد مردان نوبت اول که در این مسئله دو مرد است.

خوارزمی شش نوع معادله را بررسی می‌کند و برای هر کدام راه‌حل خاصی می‌دهد. این شش نوع معادله به زبان نمادهای امروزی چنین هستند:

۱) $x^۲=۲x$

۲) $x^۲=۳۶$

۳) $۵x=۱۰$

۴) $x^۲+۷x=۱۲۸$

۵) $۵x^۲+۲۱=۱۰x$

۶) $۱۲x+۲۸۸=x^۲$

معادله‌ی سوم معادله‌ای درجه اول است، ولی خوارزمی در بخش‌بندی خود بر این اساس عمل می‌کند که در معادله‌ی درجه دوم، سه جمله وجود دارد: جمله‌ی درجه دوم، جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت. در ترکیب معادله ممکن است تنها دو جمله از این سه جمله دخالت داشته باشند (حالت‌های ۱، ۲ و ۳) و یا هر سه جمله (حالت‌های ۴، ۵ و ۶). در ضمن، وقتی هر سه جمله از معادله‌ی درجه دوم وجود دارد، ممکن است جمله‌های درجه اول و درجه دوم در یک طرف و مقدار ثابت در طرف دیگر باشد (حالت ۴). یا جمله‌ی درجه دوم و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه اول در طرف دیگر باشد (حالت ۵). سرانجام جمله‌ی درجه اول و مقدار ثابت در یک طرف و جمله‌ی درجه دوم در طرف دیگر (حالت ۶).

همان‌طور که ضمن راه‌حل مسئله‌ی نمونه دیدیم، خوارزمی برای حل معادله، نه از دستور و نماد، بلکه از بیان استفاده می‌کند و در ضمن در حالت‌هایی که دو ریشه‌ی معادله مثبت باشند، هر دو ریشه را به دست می‌آورد و از این بابت بر جبر دیوفانتی برتری دارد.

خوارزمی برای حل معادله‌ها از

روش‌های هندسی هم استفاده می‌کند. برای نمونه در باب دوم (باب جذر، مال و عدد)، نیز عنوان استدلال در یک مال و ده جذر با سی‌ونه درهم را برابر می‌گیرد.»

خوارزمی درباره‌ی حساب «کتاب حساب الهند» را هم مطالعه کرده بود. این کتاب در پیشرفت بعدی ریاضیات در اروپایی غربی، نقش بی‌اندازه‌ای داشته است، زیرا اروپاییان به‌وسیله‌ی آن با روش هندی عددنویسی آشنا شدند. سپس دستگاه رقم‌های هندی، پایه‌ی کاربردی پیدا کرد. اروپاییان این شکل عددنویسی و شکل موضعی را در واقع از عددنویسی هندی گرفتند و آن را «عددنویسی عربی» نامیدند (حتی امروز هم بعضی از کتاب‌ها این اصطلاح نادرست را به‌کار می‌برند).

نام خوارزمی در آغاز با برگردان کتاب حساب الهند به اروپا رفت و به‌صورت لاتین شده‌ی آن «الگورتیموس» درآمد. به‌تدریج در تمامی اروپای غربی، نخست عنوان آلگورتیموس و بعدها الگوریتم، روش عددنویس هندی، یعنی همین عددنویسی امروزی ما، رواج یافت. ولی به مرور، این عنوان، یعنی الگوریتم، به هر دستگاه با دنباله‌ای از محاسبه داده شد؛ هم‌چون الگوریتم روش ضرب عددهای چندرقمی که ضرب عدد چند رقمی را به‌صورت ستونی توضیح می‌دهد، الگوریتم اقلیدس برای پیدا کردن بزرگ‌ترین بخش‌یاب عددها، الگوریتم حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، و غیر آن.

به این نکته توجه داشته باشیم که واژه‌ی لگاریتم هیچ ربطی با واژه‌ی الگوریتم و در نتیجه با نام خوارزمی ندارد.

به جز این، نامی که خوارزمی بر این کتاب جبر گذاشت، امروز در همه‌ی زبان‌های جهان باقی مانده است: در زبان فرانسوی ALgeber، در زبان انگلیسی ALgebra و در زبان روسی الگبر.

❖❖❖

از کتاب‌های خوارزمی تنها کتاب جبر و مقابله‌ی او با همت زنده‌یاد **حسین خدیوجم** به فارسی ترجمه شده است. اگر **ارشمیدس** و چند تن دیگر را کنار بگذاریم، می‌توان ادعا کرد که ریاضیات یونانی در دوران شکوفایی خود نتوانست در جهت پیدایش «جبر» یا حتی کم‌تر از آن «حساب» گامی جدی، بردارد. بیشتر ریاضی‌دانان در زمینه‌ی هندسه تلاش می‌کردند و در این راه توانستند تا درون هندسه‌ی عالی نفوذ کنند، ولی با آن‌که صدها سال پیش از ریاضی‌دان یونانی، دانشمندان سرزمین‌های میان دو رود (بین‌النهرین) به مرحله‌های بالایی از ریاضیات محاسبه‌ای رسیده بودند، یونانی‌ها حتی نتوانستند از عهده‌ی نوشتن عددهای بزرگ و دشوارتر از آن، عمل روی این عددها، به سادگی برآیند.

در واقع در یونان، عددها را به یاری حرف‌های الفبا (و با بیست و هفت نشانه) می‌نوشتند و هنوز عددنویسی آن‌ها شکل موضعی نداشت، عددنویسی موضعی همراه با قبول نمادی برای صفر در میان دو رود وجود داشت و بعدها در سده‌های نخست میلادی دوباره در هند پیدا شد.

در میان دو رود (ماوراءالنهر)، به‌صورت مقدماتی‌ترین عیلامی‌ها از شکل موضعی بودن عدد استفاده می‌کردند و در بیشتر حالت‌ها از مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند. تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه و سپس بخش‌های شصت شصتی آن و نیز تقسیم‌بندی زمان براساس ساعت، دقیقه، ثانیه و عمده‌ی کارهای قوم‌های ساکن میان دو رود براساس قبول عددنویسی شصت شصتی بود.

❖ تنها کافی نیست اندیشه‌ای خوب داشته باشیم، اصل مطلب این است که آن را خوب به کار ببریم.

«رنه دکارت»

تفاوتی را که دانشمندان بابلی و یونانی در نوع برخورد با ریاضیات داشتند، باید در نیازهای اجتماعی ـ اقتصاد این دو سرزمین و در نوع تفاوت‌های سیاسی ـ اجتماعی آن‌ها جست‌وجو کرد. در هر دو سرزمین، نظام برده‌داری حاکم بود. برده‌داری دولتی در بابل و برده‌داری شخصی در یونان.

نظام دموکراسی یونان تا حدی شامل آزادها یعنی صاحبان برده می‌شد. آزادها هرگونه کار عملی را شایسته‌ی خود نمی‌دانستند و آن‌ها را به عهده‌ی برده‌ها می‌گذاشتند. همین امر در شیوه‌ی تفکر علمی آزادها اثر گذاشت. آن‌ها هر دانشی را که کاربرد عملی داشت، دانشی پست به حساب می‌آوردند و تحقیر می‌کردند و چون تصور آن‌ها بر این بود که هندسه کاربردی عملی ندارد، آن را عزیز می‌شمردند و تمام همت خود را در کشف رازهای آن مصروف می‌داشتند. چنین بود که حساب و به‌طور طبیعی جبر که در واقع از راه تکامل حساب می‌توان به آن رسید، به خاطر جنبه‌های عملی و کاردبردی آن مورد عنایت آزادها نبود. آزادها کارهای مهم‌تری داشتند: کشف رازهای طبیعت و ساختمان جهان. به همین مناسبت، هر دانشمند یونانی فیلسوف بود و برای گره‌گشایی رازهای پنهانی جهان کوشید. کارهای پست و عملی را برده‌ها انجام می‌دادند. این کارها در اعتبار آزادها نبود. اگر کسانی هم‌چون اوپانیتوس در زمینه‌های مهندسی می‌اندیشیدند، نه در همان زمان و نه پس از خودشان مورد توجه نبودند و اندیشه‌هایشان دنبال نمی‌شد. اوپانیتوس توانسته بود با مهارت نخستین، آب‌گیری را در یکی از کوه‌های ساموس سوراخ کند و در دل کوه مسیری را به طول یک کیلومتر برای عبور آب به‌وجود آورد.

البته نباید دانشمندان بزرگی هم‌چون ارشمیدس را که در همه‌ی زمینه‌های عملی از حساب تا مکانیک کار می‌کرد، یا **ارسطو** را که تلاشی موفق در جمع‌آوری همه‌ی دانش‌های منطقی و غیرمنطقی زمان خود کرد، از جمله‌ی استثناها به شمار آورد؛ به‌ویژه که کار پرارزش آن‌ها اثر چندانی بر روند کلی حرکت دانش زمان آن‌ها نداشت. ■