برگزیده‌ای از سؤالات المپیادهای ریاضی

کشور انگلستان در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲

● ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

اشاره

درباره‌ی مسابقات و المپیادهای ریاضی در کشور انگلستان قبلاً توضیحاتی داده‌ایم. علاقه‌مندان می‌توانند به کتاب «راهنمای المپیاد ریاضی» (مقدمه‌ای بر حل مسائل بر اساس ۳۲ دوره المپیاد ریاضی بریتانیا)، ترجمه‌ی این جانب، از «انتشارات مدرسه» مراجعه کنند. در این شماره پنج مسئله از مسائل المپیادهای فوق در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را همراه با حل آن‌ها آورده‌یم.

***

مسائل

۱. می‌دانیم که:

$$34! = 295232799cd96041408476186096435ab000000$$

رقم‌های a، b، c و d را به‌دست آورید.

۲. مثلث ABC که در آن $AB < AC$ و دایره‌ی محیطی آن (S) مفروض‌اند. عمودی از A بر BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌ی دیگر P قطع کند. نقطه‌ی X روی خط AC مفروض است و BX، دایره‌ی S را در نقطه‌ی دیگر Q قطع می‌کند. ثابت کنید $BX = CX$، اگر و تنها اگر PQ قطری از S باشد.

۳. فرض کنید x، y و z عددهای حقیقی مثبت باشند؛

به‌طوری‌که: $x^۲+y^۲+z^۲=۱$. ثابت کنید:

$$x^۲yz+xy^۲z+xyz^۲\le\frac{۱}{۳}$$

۴ . همه‌ی عددهای صحیح و مثبت m و n را به‌گونه‌ای به‌دست آورید که n فرد باشد و داشته باشیم:

$$\frac{۱}{m}+\frac{۴}{n}=\frac{۱}{۱۲}$$

۵ . همه‌ی عددهای حقیقی و مثبت x را که در معادله‌ی زیر صادق هستند، به‌دست آورید:

$$x+\left\lfloor\frac{x}{۶}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{۲x}{۳}\right\rfloor$$

که در این معادله، $\lfloor t\rfloor$ نماد بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x است.

حل مسائل

۱ . می‌دانیم که اگر n عددی طبیعی و $\alpha\le n$ عددی اول باشد، تعداد عوامل α در $n!$ از دستور $\left[\frac{n}{\alpha}\right]+\left[\frac{n}{\alpha^۲}\right]+\dots$ به‌دست می‌آید (به سادگی می‌توانید علت آن را دریابید). و چون تعداد صفرهای سمت راست $n!$ از توان ۱۰ در آن به‌دست می‌آید، پس درواقع، تعداد ۵های موجود در $n!$ (توان ۵) معادل تعداد صفرهای سمت راست $n!$ است. (چرا؟) لذا تعداد صفرهای سمت راست $n!$ برابر است با: $\left[\frac{n}{۵}\right]+\left[\frac{n}{۲۵}\right]+\left[\frac{n}{۱۲۵}\right]+\dots$ و بنابراین تعداد صفرهای سمت راست $۳۴!$ مساوی است با: $\left[\frac{۳۴}{۵}\right]+\left[\frac{۳۴}{۲۵}\right]=۷$.

درنتیجه: $b=۰$.

اما هم‌چنین روشن است که اگر صفرهای سمت راست این عدد را حذف کنیم، عدد حاصل، یعنی $\frac{۳۴!}{۱۰^۷}$، باید بر ۸ بخش‌پذیر باشد. (به توان ۲ در $۳۴!$ دقت کنید.) پس باید عدد سه‌رقمی سمت راست آن، یعنی $\overline{۳۵a}$ بر ۸ بخش‌پذیر و زوج باشد. لذا ۸ یا ۶ یا ۴ یا $a=۲$ و با امتحان کردن به سادگی درمی‌یابیم که تنها ۳۵۲ بر ۸ بخش‌پذیر است و درنتیجه: $a=۲$.

اما برای یافتن c و d توجه می‌کنیم که $۳۴!$ باید بر ۹ و بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. از بخش‌پذیری آن بر ۹ نتیجه می‌شود که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر است. با محاسبه‌ای ساده درمی‌یابیم، مجموع ارقام این عدد برابر است با: $۱۴۱+c+d$. و چون باقی‌مانده‌ی ۱۴۱ بر ۹، مساوی ۶ است، پس باید $c+d+۶$ مضرب ۹ باشد:

$$c+d+۶=۹k\Rightarrow c+d=۹k-۶$$

و با توجه به این‌که $۰\le c+d\le ۱۸$، با قرار دادن مقادیر $k=۱,۲$ خواهیم داشت: ۱۲ یا $c+d=۳$ و درنتیجه:

$(c,d)=(۰,۳)$ یا $(۱,۲)$ یا $(۲,۱)$ یا $(۳,۰)$ یا $(۳,۹)$ یا $(۴,۸)$

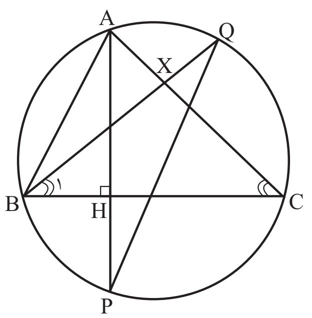
یا $(۵,۷)$ یا $(۶,۶)$ یا $(۷,۵)$ یا $(۸,۴)$ یا $(۹,۳)$

هم‌چنین، می‌دانیم که باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۱۱ از جمع و تفریق ارقام آن به‌دست می‌آید؛ یعنی:

$$۳۴!\overset{۱۱}{\equiv}۰-۰+۰-۰+۰-۰+۰-۲+۵-۳+۴-۶+۹-۰+۶-۸$$
$$+۱-۶+۷-۴+۸-۰+۴-۱+۴-۰+۶-۹+d-c+۹-۹+۷$$
$$-۲+۳-۲+۵-۹+۲=۱۹+d-c\Rightarrow ۱۹+d-c\overset{۱۱}{\equiv}d-c-۳$$
$$\Rightarrow d-c=۱۱k'+۳ \text{ و } ۰\le d-c\le ۸\Rightarrow d-c=۳$$

و تنها جوابی که در این شرط صدق می‌کند، $c=۰$ و $d=۳$ است.

۲ . فرض کنیم مطابق شکل: $BX\times CX$. در این صورت: $\hat{B}_۱=\hat{C}$ و با توجه به ویژگی زوایای محاطی نتیجه می‌شود: $CQ=AB$



هم‌چنین، با توجه به ویژگی زوایای داخلی می‌توان نوشت:

$$\hat{H}=\frac{CP+AB}{۲}=۹۰^\circ\Rightarrow CP+AB=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow CP+CQ=۱۸۰^\circ\Rightarrow PQ=۱۸۰^\circ\Rightarrow$$ PQ قطر است

برعکس، اگر بدانیم PQ قطر است، به طریق مشابه می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}PQ=۱۸۰^\circ\Rightarrow CP+CQ=۱۸۰^\circ\\ \hat{H}=\frac{CP+AB}{۲}=۹۰^\circ\Rightarrow CP+AB=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow AB=CQ$$

$$\Rightarrow\hat{B}_۱=\hat{C}\Rightarrow BX\times CX$$

۳ . با توجه به نابرابری «کوشی- شوارتز» می‌توان نوشت:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) \ge (ax+by+cz)^2$$

اگر در این نابرابری فرض کنیم: $a=b=c=xyz$ نتیجه می‌شود:

$$\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1}(x^2y^2z^2+x^2y^2z^2+x^2y^2z^2)$$

$$\ge (x^2yz+xy^2z+xyz^2)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2y^2z^2 \ge (x^2yz+xy^2z+xyz^2)^2$$

$$\Rightarrow x^2yz+xy^2z+xyz^2 \le \sqrt{3}xyz \qquad (*)$$

هم‌چنین، با توجه به نامساوی واسطه‌های حسابی ـ هندسی (AM − GM) خواهیم داشت:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \ge \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \le \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{1}$$

$$\Rightarrow 27x^2y^2z^2 \le 1 \Rightarrow xyz \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}xyz \le \frac{1}{3}$$

و با مقایسه با نامساوی (*) نتیجه می‌شود:

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2 \le \frac{1}{3}$$

۴.

$$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12} \Rightarrow 12n+48m=mn$$

$$\Rightarrow m=\frac{12n}{n-48} \Rightarrow m=\frac{12(n-48)+12\times 48}{n-48}$$

$$=12+\frac{12\times 48}{n-48} \Rightarrow n-48 \mid 12\times 48 = 2^6\times 3^2$$

حال با دادن مقادیر فرد به n که با شرط فوق صادق باشد، نتیجه می‌شود:

$n=49$ یا ۵۱ یا ۵۷ $\Rightarrow (m,n)=(588,49)$ یا $(204,51)$ یا $(76,57)$

۵. فرض می‌کنیم، $x=6y$ و از آن‌جا به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$6y+\lfloor y\rfloor=\lfloor 3y\rfloor+\lfloor 4y\rfloor$$

و با فرض $y=n+p$ که در آن $n\in Z^+$ و $0\le p<1$ است، نتیجه می‌شود:

$$6n+6p+n=3n+\lfloor 3p\rfloor+4n+\lfloor 4p\rfloor$$

$$\Rightarrow 6p=\lfloor 3p\rfloor+\lfloor 4p\rfloor$$

حال با فرض $0\le p<\frac{1}{4}$ نتیجه می‌شود: $0\le 3p<\frac{3}{4}$ و $\lfloor 3p\rfloor=0$ و $0\le 4p<1$ و $\lfloor 4p\rfloor=0$ و درنتیجه: $6p=0$ و $p=0$ و $y=n$ و $x=6n$. یعنی تمام عددهای طبیعی مضرب ۶ یک جواب معادله هستند.

اما اگر $\frac{1}{4}\le p<\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه؛ $\frac{3}{4}\le 3p<1$ و $\lfloor 3p\rfloor=0$ و $1\le 4p<\frac{4}{3}$ و $\lfloor 4p\rfloor=1$ و معادله به‌صورت $6p=0+1$ درمی‌آید و $p=\frac{1}{6}$ که در بازه‌ی ($\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$) نیست.

اگر $\frac{1}{3}\le p<\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه: $1\le 3p<\frac{3}{2}$ و $\lfloor 3p\rfloor=1$ و $\frac{4}{3}\le 4p<2$ و $\lfloor 4p\rfloor=1$ و درنتیجه: $6p=2$ و $p=\frac{1}{3}$ و $y=n+\frac{1}{3}$ و $x=6n+2$. یعنی عددهای طبیعی که باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر ۶ مساوی ۲ باشد نیز جوابی از معادله هستند.

اگر $\frac{1}{2}\le p<\frac{2}{3}$ باشد، آن‌گاه: $\frac{3}{2}\le 3p<2$ و $\lfloor 3p\rfloor=1$ و $2\le 4p<\frac{8}{3}$ و $\lfloor 4p\rfloor=2$ و درنتیجه: $6p=3$ و $p=\frac{1}{2}$ که از آن‌جا خواهیم داشت: $y=n+\frac{1}{2}$ و $x=6n+3$.

اگر $\frac{2}{3}\le p<\frac{3}{4}$ باشد، آن‌گاه: $2\le 3p<\frac{9}{9}$ و $\lfloor 3p\rfloor=2$ و $\frac{8}{3}\le 4p<3$ و $\lfloor 4p\rfloor=2$ و $6p=4$ و $p=\frac{2}{3}$ و $y=n+\frac{2}{3}$ و $x=6n+4$.

و اگر $\frac{3}{4}\le p<1$ باشد، آن‌گاه $\frac{9}{4}\le 3p<3$ و $3\le 4p<4$ و $\lfloor 3p\rfloor=2$ و $\lfloor 4p\rfloor=3$ و $6p=5$ و $p=\frac{5}{6}$ و $y=n+\frac{5}{6}$ و $x=6n+5$. بنابراین:

$x\in\{6n+r \mid n\in\mathbb{N}, r=0$ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵$\}$

❒❒❒