

باراهیان المپیادهای ریاضی (۱۲)

● غلامرضا یاسی پور

این بخش شامل نابرابری هایی است که با استفاده از این ویژگی به اثبات می رسند که: توابع حقیقی خاصی در نقاط انتهایی بازه ی تعریفشان به اکستریممشان می رسند. در این مورد دو نوع تابع را بررسی می کنیم: توابع خطی، که هر دو اکستریمم را در نقاط انتهایی «حوزه»^۱ ی مربوطه شان دارند، و توابع محدب که ماکزیممشان بر مرز حوزه ی مربوطه شان به دست می آید. روش کار، در نظر گرفتن عبارت به صورت تابعی خطی یا محدب در هریک از متغیرها به طور جداگانه، و به کار بردن آن برای محصور کردن عبارت مورد نظر از بالا یا پایین است. روش های مذکور را در مسئله ای توضیح می دهیم که در امتحان انتخابی رومانیایی المپیاد بین المللی ریاضی در ۱۹۸۰ آمده است.

● به ازای عدد مثبت مفروض a ، مطلوب است ماکزیمم:

نگاهی به نقاط انتهایی

است. ثابت کنید:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1 x_2 \dots x_n \leq n - 1$$

۴. مقدار ماکزیمم مجموع زیر را که در آن، به ازای هر

$$\frac{1}{p} \leq a_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$$

$$S_n = a_1(1 - a_2) + a_2(1 - a_3) + \dots + a_n(1 - a_1)$$

۵. فرض می‌کنیم $n \geq 2$ و به ازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $x_i \leq 1$ است. نشان دهید:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

و زمانی را معین کنید که برابری برقرار است.

۶. فرض می‌کنیم، $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعدادی حقیقی از بازه $[-98, 98]$ هستند. مقدار ماکزیمم $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1$ را بیابید.

۷. ثابت کنید، به ازای اعداد a, b, c در بازه $[0, 1]$:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

۸. اگر $a, b, c, d, e \in [p, q]$ ، با $p > 0$ ، ثابت کنید:

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}\right) \leq 25$$

$$+ 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

۹. ثابت کنید، اگر $1 \leq x_k \leq 2$ ، $k = 1, 2, \dots, n$ باشد، در

این صورت:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^2 \leq n^3$$

جواب‌ها

نگاهی به نقاط انتهایی

۱. عبارت سمت چپ نابرابری تابعی خطی از هریک از چهار متغیر است، و مینی‌م آن در یکی از نقاط انتهایی بازه‌ی تعریف به دست می‌آید. بنابراین تنها باید به بررسی $a, b, c, d \in \{0, 1\}$ بپردازیم. اگر دست‌کم یکی از آن‌ها ۱ باشد، عبارت برابر $a+b+c+d$ می‌شود که بزرگ‌تر از ۱ یا برابر ۱ است. اگر جمیع آن‌ها صفر باشند، عبارت برابر ۱ می‌شود که نابرابری را اثبات می‌کند.

۲. نابرابری، هم‌ارز این نابرابری است:

$$a(k-b) + b(k-c) + c(k-a) \leq k^2$$

اگر سمت چپ را به عنوان تابعی از a در نظر بگیریم، خطی است. شرایط صورت مسئله مستلزم آن است که بازه‌ی تعریف $[0, k]$ است. نتیجه می‌شود که برای ماکزیمم کردن سمت چپ به انتخاب $a \in \{0, k\}$ نیاز داریم.

با تکرار استدلالی مشابه در مورد b و c نتیجه می‌گیریم که ماکزیمم سمت چپ به ازای $(a, b, c) \in \{0, k\}^3$ به دست می‌آید.

$$\sum_{k=1}^n (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_{k-1}) a_k (a - a_{k+1}) \dots (a - a_n)$$

که در آن $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، به طور مستقل، روی بازه‌ی $[0, a]$

تغییر می‌کند.

به ازای شاخص k ، مقادیر $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ را ثابت در نظر می‌گیریم و به عبارت مفروض به عنوان تابعی در a_k می‌اندیشیم. این تابع، خطی است، بنابراین ماکزیممش بر بازه‌ی $[0, a]$ در یکی از نقاط انتهایی به دست می‌آید. با تکرار این استدلال در مورد هر متغیر، نتیجه می‌گیریم که عبارت مورد نظر، به ازای انتخاب خاصی از a_k مساوی a یا ۰، که در آن $k = 1, 2, \dots, n$ ، به ماکزیمم می‌رسد.

اگر جمیع a_k ‌ها برابر ۰ باشند، یا دو یا بیش از دو a_k برابر a باشند، مجموع برابر ۰ است.

اگر a_k برابر a و بقیه‌ی a_k ‌ها برابر ۰ باشند، عبارت برابر a^n است؛ در نتیجه این ماکزیمم مطلوب است.

اکنون به مثالی می‌پردازیم که در مسابقه‌ی ریاضی پاتنم^۲ آمده و با استفاده از توابع محدب حل شده است.

● فرض می‌کنیم n عددی طبیعی است و $x_i \in [0, 1]$ ،

$i = 1, 2, \dots, n$. ماکزیمم مجموع $\sum_{i < j} |x_i - x_j|$ را بیابید.

توجه داشته باشید که تابع $f(x) = |x - a|$ ، به ازای ثابت a ، محدب است. بنابراین، اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ را ثابت نگه داریم، عبارت مورد نظر، به علت آن که مجموعی از توابع محدب است، تابعی محدب در x_1 محسوب می‌شود. بنابراین، به خاطر ماکزیمم کردن آن، باید x_1 را به صورت یکی از نقاط انتهایی بازه اختیار کنیم. همین استدلال چون در مورد بقیه‌ی اعداد به کار رود، به این نتیجه منجر می‌شود که ماکزیمم مجموع، زمانی به دست می‌آید که جمیع x_i ‌ها ۰ یا ۱ باشند.

فرض می‌کنیم p مورد از آن‌ها ۰ و $n - p$ مورد از آن‌ها ۱ باشند. در این صورت، مجموع مورد نظر برابر $p(n - p)$ است. با در نظر گرفتن این مقدار به عنوان تابعی از p ، نتیجه می‌گیریم که چون n زوج باشد، ماکزیمم مربوطه به ازای $p = n/2$ به دست می‌آید و برابر $n^2/4$ است. و چون n فرد باشد، ماکزیمم مورد نظر به ازای $p = (n \pm 1)/2$ حاصل می‌شود، و برابر $(n^2 - 1)/4$ است.

موارد زیر مسائلی از این دست‌اند.

۱. فرض می‌کنیم: $0 \leq a, b, c, d \leq 1$. ثابت کنید:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1$$

۲. اعداد نامنفی a, b, c, A, B, C و در رابطه‌ی زیر صدق

می‌کنند:

$$a + A = b + B = c + C = k$$

ثابت کنید:

$$aB + bC + cA \leq k^2$$

۳. فرض می‌کنیم، به ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ ، $x_k \leq 1$



با بررسی هشت وضعیت ممکن درمی یابیم که این ماکزی مم k^2 است و مسئله حل می شود.

(جميع المپيادهاى رياضى متحد)

۳. $x_1, x_2, \dots, x_n$ را ثابت در نظر می گیریم و به بررسی تابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ،

$$f(x) = x + x_1 + \dots + x_n - xx_1 \dots x_n$$

می پردازیم. این تابع در x خطی است. در نتیجه ماکزی مم خود را در یکی از نقاط انتهایی بازه $[0, 1]$ به دست می آورد. بنابراین، برای ماکزی مم کردن سمت چپ نابرابری، باید x_1 را ۱ انتخاب کنیم، و بنا به تقارن، این مطلب در مورد متغیرهای دیگر نیز برقرار است. البته اگر جميع x_i ها برابر ۱ باشند، در این صورت برابری خواهیم داشت. اگر دست کم یکی از آن ها ۰ باشد، در این صورت حاصل ضربشان نیز صفر است، و مجموع $n-1$ جمله ی دیگر حداکثر $n-1$ می شود که نابرابری را اثبات می کند.

(مسابقه ی ریاضی رومانی)

۴. عبارت در هر یک از متغیرها خطی است. بنابراین، همانند راه حل های مسائل پیشین، ماکزی مم آن به ازای

$$a_k = \frac{1}{p} \text{ یا } k = 1, 2, \dots, n$$

به دست می آید. اگر به ازای هر k ، $a_k = \frac{1}{p}$ باشد، آن گاه

خواهیم داشت: $S_n = \frac{n}{p}$. نشان می دهیم که مقدار S_n نمی تواند از این عدد تجاوز کند.

اگر دقیقاً m تعداد از a_k ها برابر ۱ باشند، در این صورت m جمله از مجموع، صفرند. هم چنین، حداکثر m جمله برابر $\frac{1}{p}$ هستند. یعنی، جمله هایی به صورت: $a_k(1 - a_{k+1})$ با $a_k = 1$ و $a_{k+1} = \frac{1}{p}$. هریک از جمله های باقی مانده دارای هر دو عامل برابر $\frac{1}{p}$ است و در نتیجه برابر $\frac{1}{p^2}$ می شود. به این ترتیب، مقدار مجموع حداکثر عبارت است از:

$$m \cdot 0 + \frac{m}{p} + \frac{(n-m)}{p^2} = \frac{n}{p}$$

که نشان می دهد، ماکزی مم مورد نظر $\frac{n}{p}$ است.

(امتحان انتخابی IMO رومانی، ۱۹۷۵)

۵. سمت چپ نابرابری را با $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نمایش می دهیم. این عبارت نسبت به هریک از متغیرهای x_i خطی است. مانند قبل، نتیجه می گیریم که اثبات نابرابری هنگامی که x_i ها برابر ۱ یا ۰ باشند، کفایت می کند.

اگر دقیقاً k مورد از x_i ها برابر ۰ باشند و بقیه برابر ۱، آن گاه:

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq n - k$$

و از آن جا که مجموع

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1$$

دست کم $n - 2k$ است، $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کمتر از یا برابر با مقدار زیر است:

$$n - k - (n - 2k) = k$$

بنابراین، ماکزی مم S کمتر از یا برابر با $\min(k, n - k)$ است

که حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ است. نتیجه می شود که به ازای n زوج، برابری وقتی برقرار است که:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0) \text{ یا } (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$$

و به ازای n فرد، وقتی برقرار است که جميع جفت های

$$(x_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n, \text{ شامل یک صفر و یک ۱ باشند، به}$$

استثنای یک جفت که شامل دو ۱ است (با قرارداد $x_{n+1} = x_1$).

(المپياد رياضى بلغارستان، ۱۹۹۵)

۶. مجموعی که مینی مم آن را می خواهیم نسبت به هر متغیر، خطی است. در نتیجه مینی مم مورد نظر به ازای $a_i \in \{-98, 98\}$ به دست می آید. از آن جا که تعداد شاخص ها فرد است، اگر به شاخص های $\text{mod } 19$ نگاه کنیم، i ای چنان موجود است که a_i و a_{i+1} دارای یک علامت اند. در نتیجه، مجموع مورد بحث دست کم از این قرار خواهد بود:

$$-18 \times 98^2 + 98^2 = -17 \times 98^2$$

و برابری به ازای مقادیر زیر به دست می آید:

$$a_1 = a_3 = \dots = a_{19} = -98, a_2 = a_4 = \dots = a_{18} = 98$$

۷. به ازای هر دو عدد نامنفی a و β ، تابع

$$x \rightarrow \frac{\alpha}{x + \beta}$$

به ازای $x \geq 0$ هم گراست. زیرا عبارت مفروض، چون به عنوان تابعی از هریک از سه متغیر در نظر گرفته شود، مجموع دو تابع محدب و دو تابع خطی است، و بنابراین محدب. به این ترتیب، هنگامی که دو متغیر ثابت باشند، ماکزی مم مورد نظر زمانی به دست می آید که متغیر سوم در یکی از نقاط انتهایی بازه باشد. بنابراین، مقادیر عبارت همواره کمتر از بزرگ ترین مقدار حاصل از انتخاب $a, b, c \in \{0, 1\}$ هستند. بررسی ساده ای از هشت حالت ممکن نشان می دهد که مقدار عبارت مورد نظر نمی تواند از ۱ تجاوز کند. (USAMO, 1980)

۸. اگر چهار عدد از اعداد را ثابت و پنجمی را به عنوان متغیر x در نظر بگیریم، آن گاه سمت چپ، تابعی به صورت $\alpha x + \beta / x + \gamma$ ، با α, β, γ ی مثبت و x متغیر روی بازه ی $[p, q]$ درمی آید. این تابع بر بازه ی $[p, q]$ ، به علت مجموع یک تابع خطی و محدب بودن، محدب است. بنابراین، ماکزی مم خود را در یکی از (یا هر دو) نقاط انتهایی بازه ی تعریف آن به دست می آورد.



معرفی سایت های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

ادامه ی مطالب صفحه ی ۱۹

* نمودارها (Graphs)

۱. توابع و نمودارها (Functions and Graphs)

۲. هندسه ی تحلیلی صفحه

(Plane Analytical Geometry)

۳. حرکت شناسی (Kinematics)

۴. بردارها (Vectors)

* مشتق گیری (Differentiation)

۱. مقدمه ای به حسابان (Introduction to Calculus)

۲. مشتق گیری (Differentiation)

۳. کاربردهای مشتق گیری

(Applications of Differentiation)

۴. مشتق توابع غیر جبری

(Differentiation of Transcendental Functions)

* احتمال (Probability)

۱. شمارش (Counting)

۲. احتمال (Probability)

* انتگرال گیری (Integration)

۱. انتگرال گیری (Integration)

۲. کاربردهای انتگرال گیری

(Applications of Integration)

۳. روش های انتگرال گیری (Methods of Integration)

این مجموع مانند قبل، نشان می دهد که اگر سعی در ماکزیم کردن مقدار عبارت مورد نظر داریم، کافی است که اجازه دهیم a, b, c, d و مقادیر p و q را اختیار کند. اگر n عدد از این اعداد برابر p و $n - 5$ عدد برابر q باشند، آن گاه سمت چپ برابر

$$n^2 + (5 - n)^2 + n(5 - n) \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) = 25 + n(5 - n) \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

می شود. مقدار ماکزیم $n(5 - n)$ زمانی به دست می آید که برابر ۲ یا ۳ باشد و در این حال خواهیم داشت:

$$n(5 - n) = 6$$

و نابرابری به اثبات می رسد.

(USAMO, 1977)

۹. با استفاده از نابرابری $AM - GM$ می توان نوشت:

$$\sqrt[3]{\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^2} \leq \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}}{3}$$

تابع $x + \frac{2}{x}$ در بازه $[1, 2]$ محدب است. بنابراین ماکزیم خود

را در یکی از نقاط انتهایی این بازه به دست می آورد. نیز، مقدار این تابع در هریک از نقاط انتهایی برابر ۳ است. این موضوع نشان می دهد که:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}}{3} \leq n$$

و نابرابری به اثبات می رسد.

در این جا خاطر نشان می کنیم، همین ایده را می توان در اثبات صورت عمومی تر این نابرابری که از جی. اچ. سولوسی^۲ است، و به ازای $n, 1, 2, \dots$ و $x_i \in [a, b]$ ، برقرار است- یعنی نابرابری زیر- به کار برد:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{ab} \leq \left(\frac{a+b}{1+ab} n \right)^{1+ab}$$

(L. Panaitopol)



1. domain

2. W. L. Putnam Mathematical Competition

3. Gh. Söllösy