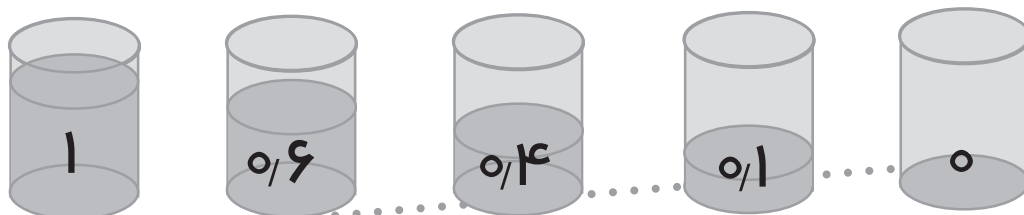


عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی
● دکتر محمدعلی فریبرزى عراقى

مقدمه‌ای بر

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی (۲)



یادآوری

از معرفی نظریه مجموعه‌های فازی توسط وی بیش از ۴۰ سال می‌گذرد و تاکنون بیش از ۱۵ هزار مقاله‌ی علمی توسط دانشمندان جهان درباره‌ی منطق فازی و کاربردهای آن در مجلات معتبر علمی منتشر شده‌اند. این اهمیت نظریه مجموعه‌های فازی و منطق فازی را که ابتدا مخالفان زیادی داشت، مشخص می‌کند. پیدایش این نظریه سبب شد، منطق دوگانه‌ی (سیاه و سفید) ارسطویی به منطق چندارزشی (خاکستری) تبدیل شود و به طراحی ماشین‌هایی هوشمند انجامید که تا قبل از معرفی این منطق، قادر به تشخیص مفاهیمی به جز صفر و یک نبودند.

ایده‌ی اساسی در منطق فازی آن است که برای هر حالت ممکن همیشه نمی‌توان یک قاعده‌ی خاص را به کار برد. تعداد قواعدی که بتوانند هر حالت را به طور دقیق تعریف کنند، بسیار محدود است.

در بخش پیشین به شرح تاریخچه‌ای از پیدایش منطق فازی و مجموعه‌های فازی پرداختیم. اشاره کردیم که بنیان‌گذار نظریه‌ی فازی پروفیسور لطفی عسگرزاده، استاد «دانشگاه برکلی» آمریکا بود که در سال ۱۹۶۵ با ارائه‌ی اولین مقاله‌ی خود، مجموعه‌های فازی را به جهان علم شناساند. مادر ایشان روس و پدر ایشان ایرانی بود. وی در سن ۱۰ سالگی در سال ۱۹۳۱ میلادی به همراه خانواده به ایران مراجعت کرد و پس از طی تحصیلات متوسطه در «دبیرستان البرز» تهران (کالج البرز سابق)، در سال ۱۹۴۲ موفق به اخذ درجه‌ی لیسانس رشته‌ی برق و الکترونیک از دانشگاه تهران شد. طی جنگ جهانی دوم بود که او برای ادامه‌ی تحصیلات به کشور آمریکا رفت و در نهایت در سال ۱۹۴۹ درجه‌ی دکترای خود را از دانشگاه کلمبیا در رشته‌ی مهندسی برق دریافت داشت.

این قواعد تنها نقاط گسسته‌ای از تمام حالات پیوسته‌ی ممکن را مشخص می‌کنند و مابا ترکیب این قواعد می‌توانیم، تقریبی برای یک حالت مشخص را به دست آوریم. منطق فازی، یک مدل ریاضی در اختیار ما می‌گذارد که تحت آن می‌توان تصمیم‌گیری کرد و مراحل تعیین مقدار را به شکل الگوریتم نشان داد. حال به ادامه‌ی بحث می‌پردازیم.

در قسمت قبل مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف کردیم:

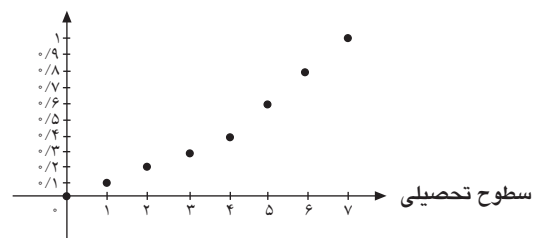
$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

که در آن، X مجموعه مرجع (جهانی) و $\mu_{\tilde{A}}$ تابع عضویت مجموعه‌ی $\tilde{A}$ است. در این قسمت ابتدا چند مثال از یک مجموعه‌ی فازی را بیان می‌کنیم. چون مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت خود مشخص می‌شود، لذا برای معرفی یک مجموعه‌ی فازی باید تابع عضویت مناسبی را که توصیف قابل قبولی از آن مجموعه‌ی فازی باشد، بیان کرد و خواهیم دید که تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی منحصر به فرد نیست.

ابتدا مجموعه‌ی فازی افراد باسواد جامعه را در نظر می‌گیریم. در این حالت، مقادیر تابع عضویت را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

و $0/1 \Rightarrow$ افراد با تحصیلات ابتدایی و $0 \Rightarrow$ افرادی بی‌سواد و $0/3 \Rightarrow$ افراد با تحصیلات دبیرستان و $0/2 \Rightarrow$ افراد با تحصیلات راهنمایی و $0/6 \Rightarrow$ افراد با تحصیلات لیسانس و $0/4 \Rightarrow$ افراد با تحصیلات فوق‌دپلم و $1 \Rightarrow$ افراد با تحصیلات دکترا و بالاتر و $0/8 \Rightarrow$ افراد با تحصیلات فوق‌لیسانس نمودار زیر نمایشی از تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی است که در آن، محور افقی سطوح تحصیلی هشت‌گانه مذکور را به صورت شماره مشخص می‌کند.

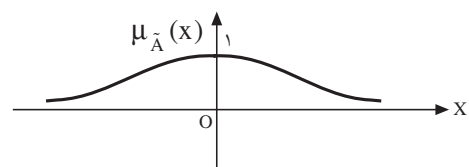
تابع عضویت



به عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی فازی تقریباً صفر را در نظر می‌گیریم. اگر $\tilde{A}$ نام این مجموعه‌ی فازی باشد، تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ را می‌توان به صورت زیر انتخاب کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

شکل زیر این تابع را نمایش می‌دهد.

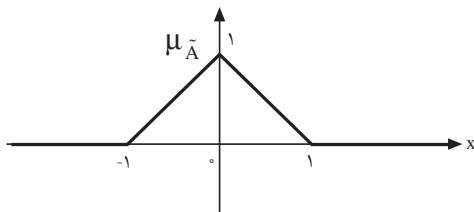


ملاحظه می‌کنیم، هر قدر به عدد صفر نزدیک‌تر شویم، مقدار تابع عضویت به حداکثر خود یعنی ۱ نزدیک می‌شود و هر قدر از صفر دور شویم، مقدار تابع عضویت به حداقل خود یعنی ۰ نزدیک می‌شود. اما فقط این تابع توصیفی برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نیست و توابع دیگری را هم می‌توان معرفی کرد که به عنوان تابع عضویت

این مجموعه به کار روند. مثلاً $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ضابطه‌ی دیگری برای تابع عضویت $\tilde{A}$ است که در آن: $\mu_{\tilde{A}}(0) = 1$. هم‌چنین تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ را به شکل زیر می‌توان معرفی کرد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x+1 & -1 < x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

شکل زیر نمایشی از این تابع عضویت را مشخص می‌کند. در این حالت، مقدار تابع عضویت به ازای $|x| \geq 1$ ، صفر تعریف شده است.



به این ترتیب برای یک مجموعه‌ی فازی می‌توان چندین تابع عضویت انتخاب کرد.

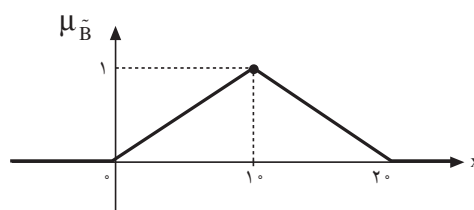
حال مجموعه‌ی فازی تقریباً 10° را در نظر می‌گیریم. اگر $\tilde{B}$ نام این مجموعه‌ی فازی باشد، نمونه‌ای از تابع عضویت برای آن عبارت است از:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \frac{1}{1+(x-10)^4}$$

در این جا نیز ملاحظه می‌شود که $\mu_{\tilde{B}}(10) = 1$ و هر قدر از عدد 10° دورتر می‌شویم، مقدار $\mu_{\tilde{B}}$ به صفر نزدیک‌تر می‌شود. برای این مجموعه‌ی فازی توابع عضویت دیگری پیدا کنید. شاید پس از قدری بررسی و دقت بتوانید تابع عضویت $\mu_{\tilde{B}}$ را با ضابطه‌ی زیر مطرح کنید.

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{20-x}{10} & 10 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نمودار این تابع عضویت به شکل زیر است.



همان طور که در مثال های فوق مشاهده شد، در معرفی ضابطه ی تابع عضویت، به عضو یا اعضای از مجموعه ی مرجع که به طور کامل ویژگی مربوطه را دارند، عدد ۱ را نظیر می کنیم و برای سایر اعضای مجموعه مرجع، بسته به آن که چه قدر از ویژگی مورد نظر دورتر هستند، مقداری از صفر تا کمتر از یک را نظیر می کنیم. مثال زیر نمونه ای از یک مجموعه ی فازی است که بیش از یک عضو عدد ۱ را به خود نظیر می کند. مجموعه ی فازی اعداد حقیقی تقریباً بین ۱ و ۲۰ و ۴۰ را در نظر می گیریم. تابع عضویت این مجموعه ی فازی که آن را با $\tilde{C}$ نمایش می دهیم، با ضابطه ی زیر معرفی می شود:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(x-20)^2} & 10 \leq x \leq 20 \\ 1 & 20 \leq x \leq 40 \\ \frac{1}{1+(x-40)^2} & 40 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این حالت، برای تمامی مقادیر از ۲۰ تا ۴۰ مقدار تابع عضویت ۱ تعریف می شود.

نکته: هر عدد حقیقی $a \in \mathbb{R}$ را می توان متناظر با یک مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ در نظر گرفت که تابع عضویت زیر را داراست:

$$\mu_{\tilde{A}}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

در ادامه، به معرفی چند عمل مهم در مجموعه های فازی می پردازیم. ابتدا مفهوم زیر مجموعه بودن و تساوی دو مجموعه ی فازی را مطرح می کنیم.

۱. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه ی فازی باشند که در مجموعه ی مرجع X تعریف شده اند. در این صورت:

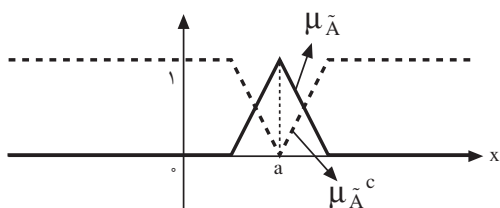
$$\tilde{A} \subset \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in X \quad (\text{الف})$$

$$\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \quad \forall x \in X \quad (\text{ب})$$

۲. مکمل مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ در X را با $\tilde{A}^c$ نمایش می دهیم و به این صورت تابع عضویت آن را به دست می آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X$$

شکل زیر نمونه ای از تابع عضویت یک مجموعه ی فازی و مکمل آن را نمایش می دهد:



۳. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه ی فازی در X باشند. در این صورت اشتراک این دو مجموعه ی فازی یک مجموعه ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می شود:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \quad \forall x \in X$$

۴. فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه ی فازی در X باشند. در این صورت، اجتماع این دو مجموعه ی فازی یک مجموعه ی فازی است که تابع عضویت آن به شکل زیر معرفی می شود:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \quad \forall x \in X$$

سوآلی که برای خواننده پیش می آید این است که: «آیا خواص نظریه ی مجموعه های قطعی نظیر $A \cap A^c = \emptyset$ ، $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ در این جا A^c به معنای متمم A است. در حالت کلی نمی توان گفت تمام خواص مجموعه های قطعی در مجموعه های فازی برقرار است، چرا که ما در مجموعه های فازی با توابع عضویت آن ها کار می کنیم. مثال زیر را در نظر بگیرید.

فرض کنید: $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. دو مجموعه ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در X به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{A} = \{(2, 0/4), (3, 0/6), (4, 0/8), (5, 1), (6, 0/8), (7, 0/6), (8, 0/4)\}$$

$$\tilde{B} = \{(1, 0/2), (2, 0/4), (3, 0/6), (4, 0/8), (5, 1), (6, 0/6), (7, 0/4), (8, 0/2)\}$$

اولاً مطلوب است $\tilde{A}^c$ و $\tilde{B}^c$ ، ثانیاً تحقیق کنید آیا:

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}^c = X \quad \text{و} \quad \tilde{A} \cap \tilde{A}^c = \emptyset$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$$

حل: اولاً، توجه می کنیم که در $\tilde{A}$ عضویت ۱ در X با درجه ی عضویت ۰ وجود دارد که چنین اعضای را در مجموعه ی فازی معمولاً نمی نویسند، ولی این اعضا در $\tilde{A}^c$ با درجه ی عضویت ۱ وجود دارند. برای سایر اعضا نیز درجه ی عضویت را از یک کم می کنیم. لذا:

$$\tilde{A}^c = \{(1, 1), (2, 0/6), (3, 0/4), (4, 0/2), (5, 0/2), (6, 0/2), (7, 0/4), (8, 0/6), (9, 1), (10, 1)\}$$