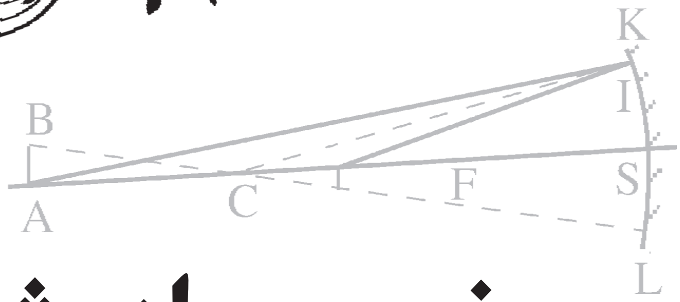


قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن

●دکتر احمد شرف‌الدین

اشاره

در مقاله‌ی حاضر، قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن آمده است. اثبات قضیه‌ها از آن نگارنده است و امکان دارد، تازگی داشته باشد. فهرست مطالب را در این‌جا یاد می‌کنیم:

۱. اثبات‌های تازه برای قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث (نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث بخش می‌کند).

۲. اثبات تازه‌ای برای همرسی سه نیم‌ساز داخلی مثلث.

۳. قضیه‌ای درباره‌ی دو مثلث که دارای یک زاویه‌ی مساوی و یک زاویه‌ی مکمل‌اند.

۴. تعمیم قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در چهاروجهی.

۵. محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث با به‌کارگیری دستور دکارت در تقسیم توافقی.

۶. به‌کارگیری قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در اثبات فرمول‌های دکارت و نیوتن در آینه‌های کروی (برگرفته از یک کتاب فیزیک).

۷. کاربرد یک رابطه‌ی توافقی تازه در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی.

***

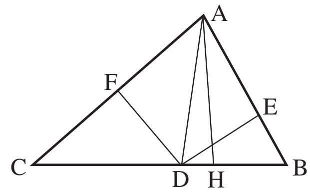
اثبات مطالب یاد شده در فهرست

۱. قضیه: **نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را بر نسبت دو ضلع دیگر بخش می‌کند.**

برهان نخست. مثلث ABC و نیم‌ساز AD را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم درستی تساوی بعد را ثابت کنیم:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

برای اثبات، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و از نقطه‌ی D پای نیم‌ساز، دو عمود DE و DF را به ترتیب بر دو خط AB و AC فرود می‌آوریم.



مساحت‌های دو مثلث ADB و ADC را به ترتیب S_1 و S_2 می‌نامیم. دو رابطه زیر را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} S_1=\frac{1}{2}\overline{DB}.\overline{AH} \\ S_2=\frac{1}{2}\overline{DC}.\overline{AH} \end{cases}$$

از دو تساوی بالا نتیجه می‌شود:

$$\text{(a)}\qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

نیز دو رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\begin{cases} S_1=\frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{DE} \\ S_2=\frac{1}{2}\overline{AC}.\overline{DF} \end{cases}$$

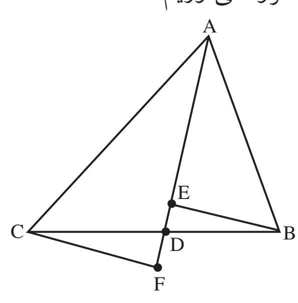
چون $\overline{DE}=\overline{DF}$ (زیرا نقطه‌ی D روی نیم‌ساز زاویه‌ی A قرار دارد) پس:

$$\text{(b)}\qquad \frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

از دو رابطه‌ی (a) و (b)، رابطه‌ی مطلوب به دست می‌آید:

* * *

برهان دوم: در مثلث ABC، از دو رأس B و C، دو عمود BE و CF را بر نیم‌ساز AD فرود می‌آوریم.



دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE و ACF متشابه‌اند. زیرا زاویه‌های آن‌ها مساوی است (توجه می‌کنیم که خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A است). از تشابه دو مثلث یاد شده، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

دو مثلث DBE و DCF متشابه‌اند، زیرا دو خط BE و CF موازی‌اند. پس:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

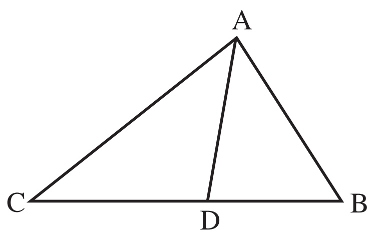
* * *

برهان سوم: نخست قضیه‌ی سینوس‌ها را در مثلث یادآوری می‌کنیم:

قضیه‌ی سینوس‌ها: در مثلث ABC، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

a، b، c طول‌های اضلاع روبه‌رو به زاویه‌های A، B، C هستند.



با به‌کارگیری قضیه‌ی سینوس‌ها، در مثلث ADB چنین می‌نویسیم:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(ADB)}=\frac{\overline{DB}}{\sin(BAD)}$$

و نیز در مثلث ADC می‌نویسیم:

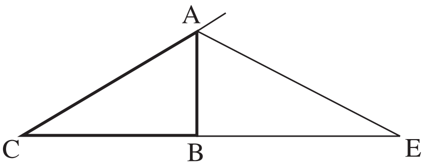
$$\frac{\overline{AC}}{\sin(ADC)}=\frac{\overline{DC}}{\sin(DAC)}$$

از دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

(توجه کنیم که چون دو زاویه‌ی ADC و ADB مکمل‌اند، سینوس‌های مساوی دارند.)

تمرین: قضیه‌ی ۱ را درباره‌ی نیم‌ساز خارجی مثلث ثابت کنید.

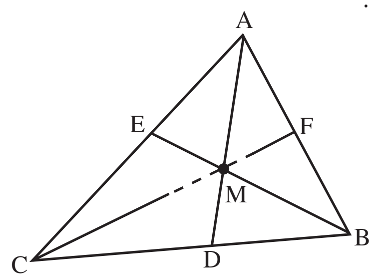


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}}$$

***

۲ . قضیه : نیم‌سازهای داخلی هر مثلث همرس‌اند .

برهان : در مثلث ABC نیم‌سازهای داخلی AD ، BE و CF را درنظر می‌گیریم :



نقطه‌ی برخورد دو نیم‌ساز AD و BE را M و نقطه‌ی برخورد دو نیم‌ساز AD و CF را N می‌نامیم . ثابت می‌کنیم که دو نقطه‌ی M و N برهم منطبق‌اند و از آن نتیجه می‌گیریم که سه نیم‌ساز داخلی هر مثلث همرس‌اند .

خط BE نیم‌ساز زاویه‌ی B در مثلث ABD است . بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}$$

خط CF نیم‌ساز زاویه‌ی C از مثلث ACD است . بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$$

خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A از مثلث ABC است . بنابر قضیه‌ی (۱) می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CD}}$$

از سه رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌شود :

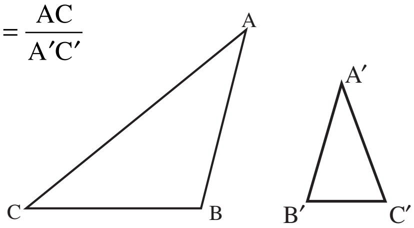
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{ND}}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی M بر نقطه‌ی N منطبق است و صحت قضیه‌ی مورد نظر ثابت می‌شود .

***

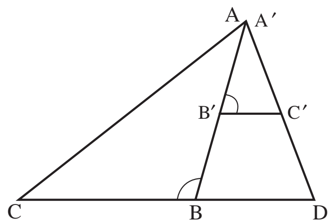
۳ . قضیه : اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، دو زاویه‌ی A و A' مساوی و دو زاویه‌ی B و B' مکمل باشند، آن‌گاه چنین داریم :

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$



یعنی نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه‌ی مساوی، برابر است با نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه‌ی مکمل

برهان: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را مانند شکل زیر پهلوی هم می‌گذاریم :



نقطه‌ی برخورد دو خط BC و $A'C'$ را D می‌نامیم . چون دو زاویه‌ی B و B' مکمل‌اند، پس دو خط BD و $B'C'$ موازی‌اند . چون دو زاویه‌ی A و A' مساوی‌اند، پس خط AB نیم‌ساز زاویه‌ی CAD در مثلث ACD است . از تشابه دو مثلث $A'B'C'$ و $A'BD$ رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$\frac{A'C'}{A'D}=\frac{B'C'}{BD}$$

بنابر قضیه‌ی (۱) درباره‌ی نیم‌ساز، می‌توان چنین نوشت :

$$\frac{A'D}{BD}=\frac{AC}{BC}$$

از دو رابطه‌ی اخیر رابطه‌ی زیر که مطلوب است، حاصل می‌شود :

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

***

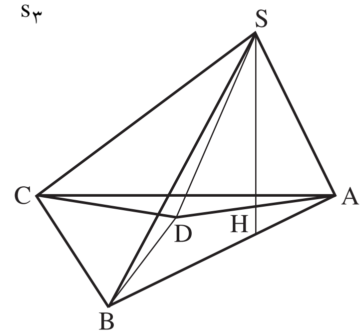
۴ . تعمیم قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث به صورت قضیه‌ی نیم‌ساز در چهاروجهی (طرح نگارنده)

در چهاروجهی SABC، نیم‌ساز سه‌وجهی SABC را SD

می‌نامیم.

مساحت‌های سه مثلث SAB، SBC و SCA را به ترتیب S_1، S_2، و S_3 می‌نامیم. مساحت‌های سه مثلث DAB، DBC، و DCA را به ترتیب s_1، s_2 و s_3 می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم تساوی‌های زیر برقرار است:

$$\frac{S_1}{s_1}=\frac{S_2}{s_2}=\frac{S_3}{s_3}$$



برهان: قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث را یادآور می‌شویم: اگر خط AD نیم‌ساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد، چنین داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$$

این تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DC}$$

تساوی اخیر ما را رهنمون می‌شود که قضیه‌ی مذکور در بالا، یعنی قضیه‌ی نیم‌ساز در چهاروجهی را حدس بزنیم. برای اثبات قضیه، ارتفاع AH و نیم‌ساز AD را رسم می‌کنیم (یادآور می‌شویم که نیم‌ساز یک سه‌وجهی خطی است که فاصله‌ی هر نقطه از آن، از سه وجه آن سه‌وجهی یکسان باشد). حجم‌های سه چهاروجهی SDAB، SDBC و SDCA را به ترتیب V_1، V_2، و V_3 می‌نامیم. رابطه‌های زیر را می‌نویسیم:

$$\mathrm{I}\begin{cases}V_1=\frac{1}{3}s_1.\overline{AH}\\ V_2=\frac{1}{3}s_2.\overline{AH}\\ V_3=\frac{1}{3}s_3.\overline{AH}\end{cases}$$

از نقطه‌ی D پای نیم‌ساز AD، عمودهای DH_1، DH_2، و DH_3 را به ترتیب بر سه وجه SAB، SBC، و SCA رسم می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\mathrm{II}\begin{cases}V_1=\frac{1}{3}S_1.\overline{DH_1}\\ V_2=\frac{1}{3}S_2.\overline{DH_2}\\ V_3=\frac{1}{3}S_3.\overline{DH_3}\end{cases}$$

از رابطه‌های I و II، رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{III}\begin{cases}\frac{S_1}{s_1}=\frac{\overline{DH_1}}{\overline{AH}}\\ \frac{S_2}{s_2}=\frac{DH_2}{AH}\\ \frac{S_3}{s_3}=\frac{DH_3}{AH}\end{cases}$$

اما: $\overline{DH_1}=\overline{DH_2}=\overline{DH_3}$ (زیرا خط SD، نیم‌ساز سه‌وجهی SABC است و لذا فاصله‌ی نقطه‌ی D از سه وجه سه‌وجهی SABC مساوی است). از تساوی‌های III نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_1}{s_1}=\frac{S_2}{s_2}=\frac{S_3}{s_3}$$

***

نقش نیم‌سازهای مثلث در اثبات قضیه‌های تقسیم توافقی

در سطرهای آینده از تقسیم توافقی یاد می‌کنیم. سپس فرمول دکارت و فرمول نیوتن را در تقسیم توافقی می‌نویسیم. در شماره‌ی ۵، دستور دکارت را در تقسیم توافقی، برای محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث به‌کار می‌بریم. در شماره‌ی ۶، قضیه‌ای از تقسیم توافقی را مطرح و اثبات می‌کنیم و از این قضیه در شماره‌ی ۷ بهره می‌گیریم. در شماره‌ی ۷، کاربرد دستور دکارت و نیوتن را در آینه‌های کروی یاد می‌کنیم (در این شیوه‌ی اثبات، از قضیه‌ای مربوط به نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث بهره گرفته شده است). مطلب شماره‌ی ۷ را از کتاب فرانسوی «تصویرها در علم نور»[1] اثر **فلوری**[2] و **ماتیو**[3] برگرفته‌ام. در شماره‌ی ۸، یک دستور تازه در تقسیم توافقی عرضه کرده‌ام و آن را برای اثبات یکی از قضیه‌های اساسی هندسه به‌کار برده‌ام.

الف) تعریف تقسیم توافقی: بر محور $x'x$، دو نقطه‌ی A و B اختیار می‌کنیم. دو نقطه‌ی M و N را روی محور $x'x$ طوری انتخاب می‌کنیم که تساوی بعد برقرار باشد. در این صورت می‌گوییم

پاره‌خط AB به وسیله‌ی دو نقطه‌ی M و N به توافق تقسیم شده است و نیز می‌گویند چهار نقطه‌ی A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

ب) دستور دکارت و نیوتن در تقسیم توافقی: اگر چهار نقطه‌ی A، B، C، و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند، دو رابطه‌ی زیر محقق‌اند:

دستور دکارت $$\frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AM}} + \frac{۱}{\overline{AN}}$$

دستور نیوتن $$\overline{OA}^{۲} = \overline{OB}^{۲} = \overline{OM}.\overline{ON}$$

(نقطه‌ی O وسط پاره‌خط AB است)

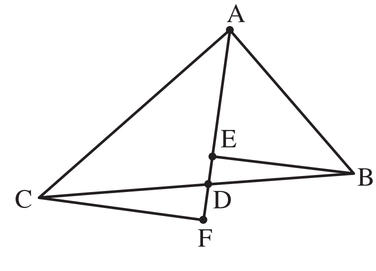
***

۵. محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث (با به‌کارگیری دستور دکارت). در مثلث ABC، طول نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A که آن را به AD نشان می‌دهیم، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{۲\cos\frac{A}{۲}}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$$

(محاسبه‌ی طول نیم‌ساز زاویه‌ی A بر حسب اندازه‌ی زاویه‌ی A و طول‌های دو ضلع دو طرف زاویه‌ی A).

این فرمول، در کتاب‌های مثلثات ثابت شده است. در سطرهای زیر، با به‌کارگیری فرمول دکارت در تقسیم توافقی، درستی فرمول یاد شده در بالا را ثابت می‌کنیم.



برای اثبات مطلب، دو عمود BE و CF را بر نیم‌ساز AD وارد می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که چهار نقطه‌ی A، D، E و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE و ACF رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF}$$

از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی BDE و CDF رابطه‌ی ذیل به‌دست می‌آید:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{CF}{DF}$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

بنابر رابطه‌ی اخیر، چهار نقطه‌ی A، D، E، و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. پس رابطه‌ی زیر محقق است:

رابطه‌ی دکارت $$\frac{۲}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}}$$

از سوی دیگر چنین داریم:

$$\overline{AE} = \overline{AB}.\cos\frac{A}{۲}$$

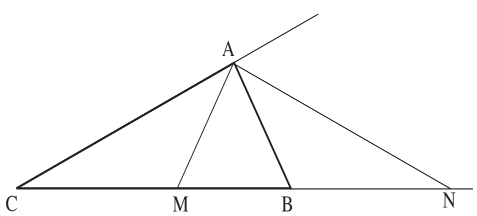
$$\overline{AF} = \overline{AC}.\cos\frac{A}{۲}$$

از سه رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید.

***

۶. بهره‌گیری از خاصیت نیم‌سازهای مثلث در تقسیم توافقی. در مثلث ABC، اگر دو نقطه‌ی M و N به ترتیب پاهای نیم‌سازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A باشند، آن‌گاه چهار نقطه‌ی B، C، M، و N تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

برهان. چون Am نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A است، پس بنابه قضیه‌ی ۱ چنین داریم:



$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

چون AN نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A است، پس چنین داریم:

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

از دو رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

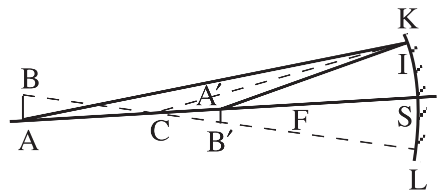
$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC}$$

پس چهار نقطه‌ی B، C، M، N تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

***

۷. کاربرد قضیه‌ی ۶ در آینه‌های کروی

در آینه‌ی کروی M، مرکز را C، رأس را S و کانون را F می‌نامیم. تصویر شکل AB را به $A'B'$ نموده‌ایم. تصویر شکل AB را به $A'B'$ نموده‌ایم. برای ترسیم تصویر $A'B'$، شعاع تابش دل‌خواه $A\hat{I}$ را رسم می‌کنیم و زاویه‌ی $C\hat{I}A'$ را برابر زاویه‌ی $A\hat{I}C$ می‌سازیم. نقطه‌ی A' تصویر نقطه‌ی A به‌دست می‌آید (زیرا می‌دانیم که شعاع تابش و شعاع بازتاب نسبت به شعاعی از آینه که از نقطه‌ی فرود می‌گذرد، قرینه‌اند)



چون زاویه‌ی دهانه‌ی آینه، یعنی زاویه‌ی گشادگی KCS، کوچک است (مثلاً در حدود $\frac{۱}{۲۰}$ رادیان یا سه درجه) پس زاویه‌ی $C\hat{I}S$ محسوساً یک زاویه‌ی قائمه است؛ زیرا مثلث $C\hat{I}S$ متساوی‌الساقین است و در این مثلث، زاویه رأس کوچک است. پس خط IS محسوساً نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی AIA' است.

مختصر آن‌که خط KC نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی مثلث AKA' است و خط KS خیلی به نیم‌ساز خارجی مثلث AKA' نزدک است. پس چهار نقطه‌ی A، A'، C و S، محسوساً تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند و می‌توانیم دستورهای زیر را به کار بریم:

رابطه‌ی دکارت $\frac{۱}{\overline{SA}}+\frac{۱}{\overline{SA'}}=\frac{۲}{\overline{SC}}=\frac{۱}{\overline{SF}}$

رابطه‌ی نیوتن $\overline{FA}.\overline{FA'}=\overline{SF}^{۲}$

***

۸. یک رابطه‌ی توافقی تازه

در سطرهای بعد با به‌کارگیری خواص نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث، یک رابطه‌ی توافقی تازه ارائه می‌شود کاربردی از آن در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی یاد می‌شود (این رابطه‌ی توافقی از آن نگارنده است).

اگر نقاط A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی دهند، رابطه‌های زیر محقق است:

$$(۱)\quad \overline{AB}^{۲}=\overline{AC}.\overline{AD}+\overline{BC}.\overline{BD}$$

$$(۲)\quad \overline{CD}^{۲}=\overline{CA}.\overline{CB}+\overline{DA}.\overline{DB}$$

الف) برهان جبری: بنا به تعریف تقسیم توافقی چنین داریم:

$$(۳)\quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

بر محور $x'x$ که منطبق بر خط AB است، نقطه‌ی A را مبدأ می‌گیریم (برای آسانی محاسبه). طول‌های نقطه‌های B، C و D را روی این محور، به‌ترتیب b، c و d می‌نامیم. رابطه‌ی ۳ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-c}{b-c}=\frac{d}{b-d}$$

و یا:

$$c(d-b)=d(b-c)$$

به دو طرف رابطه‌ی بالا عبارت $-b(d-b)$ را می‌افزاییم. حاصل می‌شود:

$$(c-b)(d-b)=d(b-c)-b(d-b)$$

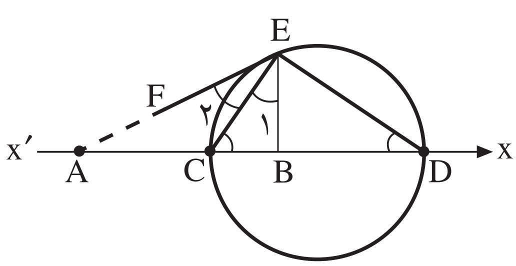
پس از اختصار نتیجه می‌شود:

$$b^{۲}=cd+(c-b)(d-b)$$

رابطه‌ی ۴، همان رابطه‌ی ۱ است.

با استدلالی مشابه آن‌چه گذشت، می‌توان درستی رابطه‌ی ۲ را ثابت کرد.

ب) برهان هندسی: روی محور $x'x$ چهار نقطه‌ی A، B، C و D را که تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، در نظر می‌گیریم. برای اثبات رابطه‌ی ۱، دایره‌ای به قطر CD و عمود BE را بر خط CD رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن را با دایره، E می‌نامیم.



از نقطه‌ی E، مماس EF را بر دایره رسم می‌کنیم. این خط مماس بر نقطه‌ی A می‌گذرد. (برای اثبات می‌گوییم، دو زاویه‌ی D و E_1 برابراند، زیرا هردو متمم زاویه‌ی C هستند و نیز دو زاویه‌ی E_1 و E_2 برابراند، زیرا اندازه دو زاویه‌ی D و E_2، هر دو نصف اندازه‌ی کمان AC هستند. پس خط EC نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی BEF و خط DE که بر خط EC عمود است، نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی BEF است. پس بنابر قضیه‌ی ۶، خط EF بر نقطه‌ی A می‌گذرد).

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABE چنین داریم:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EB}^2$$

از تشابه دو مثلث AEC و AED نتیجه می‌شود:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}.\overline{BD}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ECD، پاره‌خط EB ارتفاع است، پس چنین داریم:

$$\overline{BE}^2 = -\overline{BC}.\overline{BD}$$

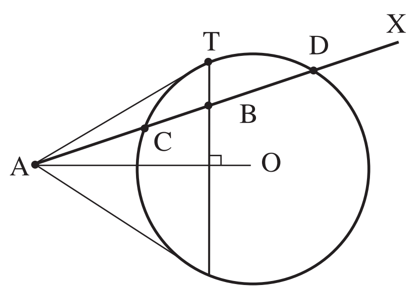
از سه رابطه‌ی اخیر، رابطه‌ی ۱ نتیجه می‌شود.

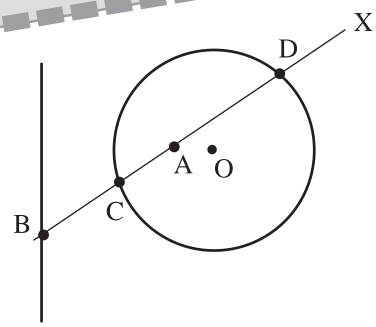
اثبات رابطه‌ی ۲، با اثبات پیشین مشابه است.

* * *

۹. کاربرد رابطه‌ی توافقی یاد شده در شماره‌ی ۸

الف) اثبات تازه‌ای از قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی. دایره‌ی (O,R) و نقطه‌ی ثابت A در صفحه‌ی آن را در نظر می‌گیریم. خط متحرک AX در صفحه‌ی دایره، دور نقطه‌ی A می‌چرخد و دایره را در دو نقطه‌ی متغیر C و D قطع می‌کند. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی B از خط متحرک AX، به‌طوری که چهار نقطه‌ی A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند.





برهان: بنابر رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره ۸ می‌نویسیم:

$$(1)\quad \overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AD} + \overline{BC}.\overline{BD}$$

یکی از قضیه‌های هندسه می‌گوید، اگر از نقطه‌ی دل‌خواه A واقع در صفحه‌ی دایره (O,R) قاطع دلخواهی رسم کنیم و نقاط تقاطع آن را با دایره، B و C بنامیم، چنین داریم:

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AO}^2 - R^2$$

بنابر قضیه‌ی پیش گفته، دو رابطه‌ی زیر را می‌نویسیم:

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AO}^2 - R^2 \\ \overline{BC}.\overline{BD} = \overline{BO}^2 - R^2 \end{cases}$$

رابطه‌ی ۱ با رعایت دو رابطه‌ی ۲ به صورت زیر در می‌آید:

$$\overline{BA}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2 - 2R^2 = \text{ثابت}$$

یعنی تفاضل مربع‌های فاصله‌های نقطه‌ی متحرک B از دو نقطه‌ی ثابت A و O مقداری است ثابت. پس مکان آن نقطه خطی راست عمود بر خط AO.

* * *

ب) کاربرد رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره‌ی ۸. در شکل آینه‌ی کروی، چهار نقطه‌ی A، A'، C و D، محسوساً تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند و بنابر رابطه‌ی توافقی یادشده در شماره‌ی ۸، می‌توان نوشت:

$$\overline{SC}^2 = \overline{SA}.\overline{SA'} + \overline{CA}.\overline{CA'}$$

و یا:

$$R^2 = 4f^2 = \overline{SA}.\overline{SA'} + \overline{CA}.\overline{CA'}$$

در رابطه‌ی بالا، f فاصله‌ی کانونی است و SA و SA' فاصله‌های رأس آینه از شئ و تصویراند و CA و CA' فاصله‌های مرکز آینه از شیء و تصویراند.

1. Images optiques 2. P. fleury 3. J. P. mathieu