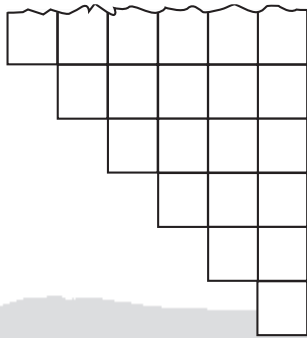
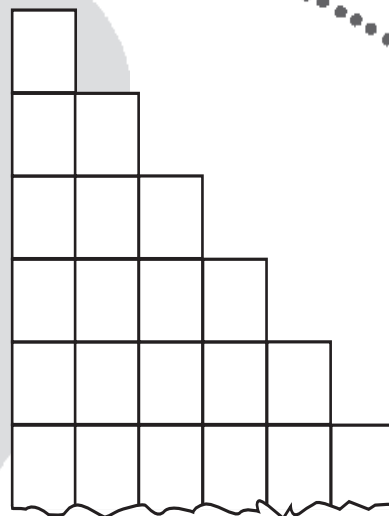




ترجمه: شهین پنهان

نگاهی به سری‌های هندسی

$$\sum_{k=1}^n k^2 \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^n k$$



چکیده

در این مقاله، با نگاهی نو و جدید به سری‌های هندسی پرداخته‌ایم و از شکل‌های آشنای هندسی، برای اثبات جمع‌های جبری آموخته شده استفاده کرده‌ایم. برای اثبات رابطه‌ی اول از مساحت مربع‌های ایجاد شده در سطرها که روی هم قرار گرفته‌اند و در رابطه‌ی دوم از مکعب‌هایی به ضلع یک واحد استفاده شده است. سپس به کمک برش‌های داده شده، شکل‌ها محدودتر شده‌اند تا راحت‌تر بتوان مساحت و حجم آن‌ها را محاسبه کرد. در نهایت، مجموع مساحت‌ها در رابطه‌ی اول و نیز مجموع حجم‌ها در رابطه‌ی دوم، همان رابطه‌ی آشنای سری‌های هندسی را نتیجه‌گیری کرده است. هدف این مقاله، آشنایی دانش‌آموزان و همکاران با دیدگاهی دیگر برای اثبات سری‌هاست تا عزیزان با فهم بیشتر مسائل ریاضی و تجزیه و تحلیل آن‌ها، تأثیر مثبت تفکر ریاضی را دریابند.

۵۰

رشته: آموزش

دوره‌ی هجدهم / شماره‌ی ۲ زمستان ۱۳۹۷

مقدمه

تجربیات جدید و پژوهش در ریاضی، سبب می‌شود که انسان با بصیرت بیشتری به سامان‌دهی ذهن و اندیشه‌ی خویش پردازد و

برای رویارویی با چالش‌های علمی در بستر تدریس آماده شود. اکثر آموزشگران ریاضی، یادگیری ریاضی را مبنای توفیق فرد در حل مسئله، هم در زندگی عادی و هم در حوزه‌های دیگر مانند شیمی، فیزیک و... می‌دانند. بنابراین بهتر است، به دنبال روش‌های جدید و جذاب برای اثبات آموخته‌های قبلی باشیم تا نشان دهیم، ریاضی اگر زیبا و فهمیدنی باشد، بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست. قبلاً با دو نمونه از جمع‌های جبری زیر آشنا شده‌ایم:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حال می‌خواهیم به $\sum_{k=1}^n k$ و $\sum_{k=1}^n k^2$ از منظر هندسی بنگریم و

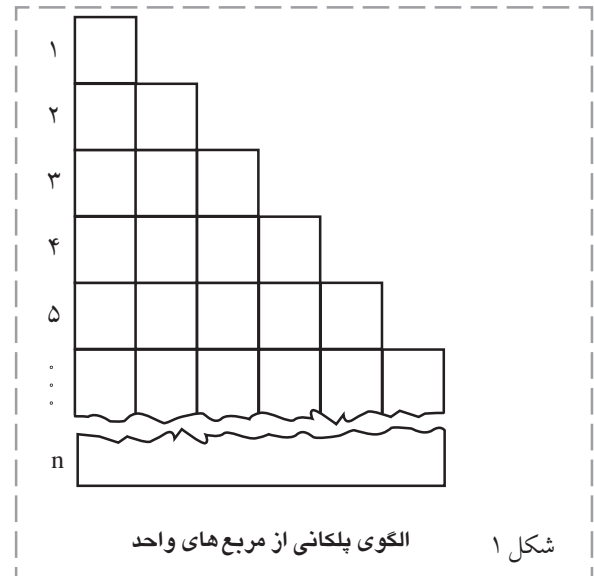
آن‌ها را اثبات کنیم.

برای اثبات اولین جمع، مربع‌هایی را داریم که با استفاده از مساحت آن‌ها، اتحاد بالا اثبات می‌شود. و برای دومین جمع، آرایشی از مکعب‌ها را داریم که حجم آن‌ها به اثبات اتحاد می‌انجامد.

اثبات اولین مجموع

برای اثبات اولین مجموع، مربع‌هایی به طول ضلع یک واحد را داریم، که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل می‌بینیم که یک مربع روی اولین سطر، دو مربع روی دومین سطر، سه مربع روی سومین سطر و... تا n مربع روی n امین سطح قرار دارد. این مربع‌ها جمع زیر را می‌سازند:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$



علاوه بر این، می‌توان شکل بالا را با جدا کردن قسمت‌هایی از

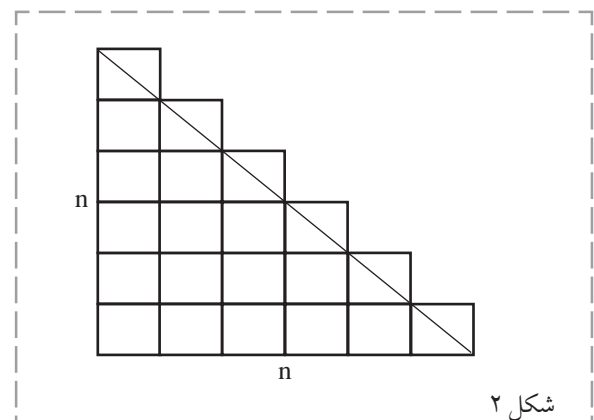
آن به شکل ۲ تبدیل کرد. مساحت مثلث بزرگ در شکل ۲، $\frac{n^2}{2}$

است؛ زیرا n سطر و n ستون دارد. از طرف دیگر، نیم شدن مربعات باقی‌مانده در شکل، نشان می‌دهد که مساحت آن‌ها نیز نصف شده است و چون در n سطر، n مثلث داریم، پس مساحت آن‌ها می‌تواند

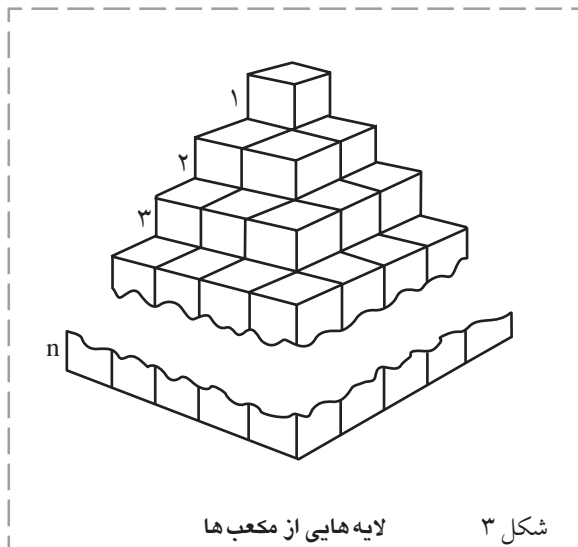
$n(\frac{1}{2})$ باشد. به این ترتیب، مجموع مساحت‌ها در شکل ۲ یا $\sum_{k=1}^n k$

$$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

برابر با $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$ خواهد شد که برابر است با:



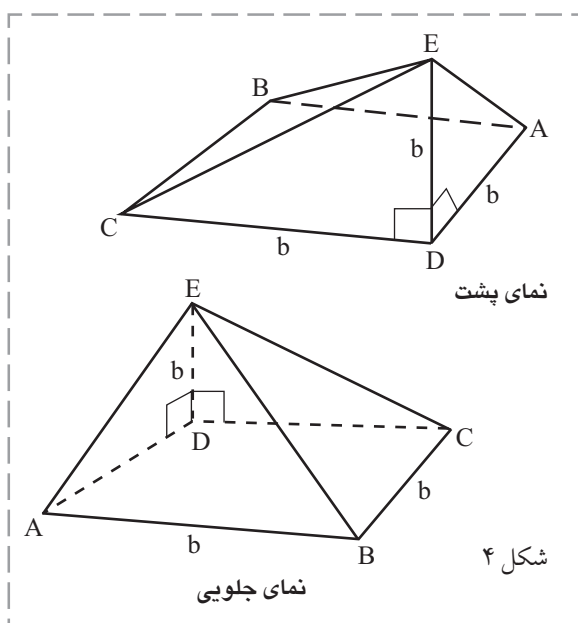
اثبات دومین مجموع



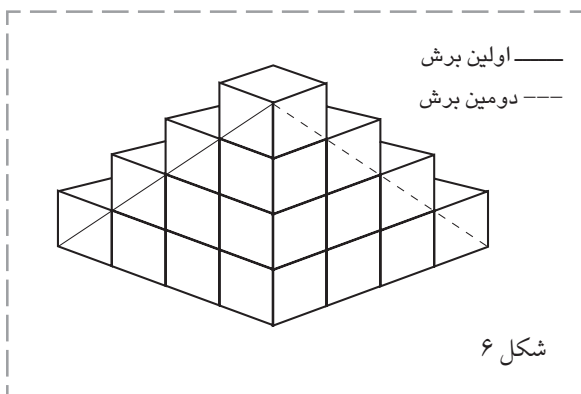
حال برای مجموع دوم، اگر بخواهیم $\sum_{k=1}^n k^2$ را به وسیله‌ی شکل‌های هندسی نمایش دهیم، با توجه به شکل ۳ تعداد مکعب‌ها در هر سطر برابر با k^2 است. یعنی یک مکعب در اولین سطر، چهار مکعب در دومین سطر، نه مکعب در سومین سطر و همین‌طور تا آخر، تا n امین سطر. به‌طور کلی ما در شکل ۳، n^2 مکعب داریم که اگر تعداد آن‌ها شمارش شود، حجم شکل، مجموع زیر خواهد بود:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

برای این قسمت هم از روشی که در جمع اول اعمال شد، بهره می‌گیریم. پس شکل ۳ را با برش‌هایی تقسیم می‌کنیم که بدین وسیله شکل‌های زیر ایجاد خواهند شد:



به صورت شکل ۶ نمایش داد.



پس می توان گفت: چون مکعب n سطر دارد، حجم هرم بزرگ $\frac{1}{3}n^3$ است و تکه های باقی مانده نیز $\frac{2}{3}n^3$ حجم دارند. حال تنها قسمت هایی که هنوز محاسبه نشده اند، نیمه هایی هستند که در قسمت های بالایی قرار گرفته اند و به صورت $(n-1)$ لایه مکعب نصف شده روی n لایه هستند و حجم آن ها به این صورت محاسبه می شود:

$$\frac{1}{4}(1+2+3+\dots+(n-1))$$

که با استفاده از مجموع اول، مقدار آن $\frac{1}{4}((n-1)\frac{n}{2})$ به دست می آید.

بنابراین، مجموع حجم شکل و در نتیجه $\sum_{k=1}^n k^2$ برابر است با:

$$\underbrace{\frac{n^3}{3}}_{(I)} + \underbrace{\frac{(n-1) \times n}{2}}_{(II)} + \underbrace{\frac{2n}{3}}_{(III)}$$

(I) حجم هرم بزرگ

(II) قسمت بالایی مکعبات نیمه

(III) باقی مانده مکعبات پس از برش دوباره

بنابراین داریم:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n}{3} = \frac{2n^3 + 3n(n-1) + 4n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3(n-1) + 4)}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

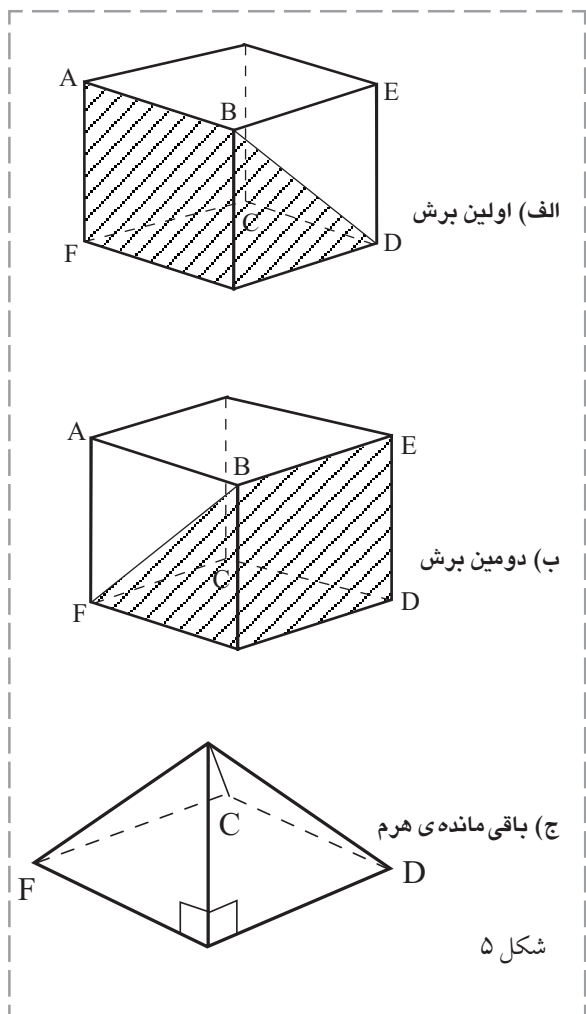
و این همان جوابی است که انتظار داشتیم.



نمای پشت و جلویی تقسیم ها، هرم هایی با قاعده ی $ABCD$ هستند و DE عمودی است که برای قاعده ی $ABCD$ ارتفاع محسوب می شود. ضلع ها و لبه های دیگر یکسان هستند و طولی برابر b دارند. پس فرمول حجم هرم تشکیل شده به این صورت خواهد بود:

$$\frac{b^3}{3} = (b^2)(b) \div 3 = (\text{ارتفاع}) (\text{مساحت قاعده هرم})$$

شکل های ۵، عمل برش را در مکعب شکل ۳ از نگاهی دیگر نشان می دهند. مکعب به وسیله ی برش هایی به دو قسمت از AB به CD برش داده شده و سپس به وسیله ی چرخش مکعب، عمل برش از لبه ی BE به CD انجام شده است.



بالاخره و در نهایت از تقسیم شکل ۳، مکعب به دو تکه جداگانه تقسیم می شود.

حجم هرم به دست آمده $\frac{b^3}{3}$ است. پس حجم باقی مانده ی هرم

می شود (شکل ۵-الف). این برش ها را به طور کلی می توان $\frac{2b^3}{3}$