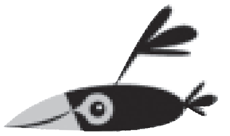
مجموعه‌ی زیرمجموعه‌ها

● حمیدرضا امیری



می‌دانیم اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد آنگاه ۲^n زیر مجموعه دارد، حال اگر همه‌ی این زیر مجموعه‌ها را اعضای مجموعه‌ای در نظر بگیریم، آن را مجموعه‌ی توانی[1] A نامیده و با $p(A)$ نمایش می‌دهیم. پس، $p(A)$ یعنی مجموعه‌ی شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های A که اگر تعداد اعضای A را با $|A|$ و تعداد اعضای $p(A)$ را با $|p(A)|$ نمایش دهیم خواهیم داشت:

I) $|A|=n \Leftrightarrow |p(A)|=۲^n$

II) $B\subseteq A \Leftrightarrow B\in p(A)$

تذکر مهم: چون همواره $\varnothing \subseteq A$ پس بنابر (II) همواره $\varnothing\in p(A)$ و بنابراین همواره برای هر مجموعه‌ی دلخواه مانند A داریم، $p(A)\neq\varnothing$.

مثال۱: اگر $A=\{۲,۳,۴\}$ در این صورت

$$p(A)=\{\varnothing, A,\{۲\},\{۳\},\{۴\},\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۳,۴\}\}$$

مثال۲: اگر $A=\varnothing$ در این صورت

$$p(A)=\{\varnothing\}$$

مثال۳: اگر $|A|=۲$ (A مجموعه‌ای ۲ عضوی است) در این صورت مجموعه‌ی $p(p(p(A)))$ چند عضو دارد؟

$$|A|=۲\Rightarrow|p(A)|=۲^۲=۴\Rightarrow|p(p(A))|=۲^۴=۱۶$$
$$\Rightarrow |p(p(p(A)))|=۲^{۱۶}$$

مثال۴: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$A\subseteq B\Leftrightarrow p(A)\subseteq p(B)$

حل: ابتدا فرض می‌کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $p(A)\subseteq p(B)$، (به روش عضوگیری دلخواه)

[فرض کنیم $X\in p(A)\Rightarrow X\subseteq A \xrightarrow{A\subseteq B} X\subseteq B\Rightarrow X\in p(B)$]
$\Rightarrow p(A)\subseteq p(B)$

حال فرض می‌کنیم $p(A)\subseteq p(B)$ و ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$،

[فرض کنیم $x\in A\Rightarrow \{x\}\subseteq A\Rightarrow \{x\}\in p(A)\xrightarrow{p(A)\subseteq p(B)}\{x\}\in p(B)$
$\Rightarrow \{x\}\subseteq B\Rightarrow x\in B$] $\Rightarrow A\subseteq B$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعه باشند همواره داریم:

$A=B\Leftrightarrow p(A)=p(B)$

مثال ۵: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه مانند A و B ثابت کنید:

(I) $p(A)\cap p(B)=p(A\cap B)$

(II) $p(A)\cup p(B)\subseteq p(A\cup B)$

حل: برای اثبات روابط فوق نیاز به بیان دو ویژگی در مجموعه‌ها و بین اعمال اجتماع و اشتراک داریم یعنی:

$$\text{I)}\ \begin{matrix}A\subseteq B\\ A\subseteq C\end{matrix} \Leftrightarrow A\subseteq(B\cap C)$$

$$\text{II)}\ \begin{matrix}A\subseteq B\\ A\subseteq C\end{matrix} \Rightarrow A\subseteq(B\cup C)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید عکس رابطه‌ی (II) در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. و مثال‌های نقض فراوانی می‌توان برای آن یافت در صورتی که رابطه‌ی (I) به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بیان شده و اثبات این روابط به‌خصوص از روش عضوگیری دلخواه بسیار ساده است!

حال رابطه‌ی (I) را ثابت می‌کنیم،

فرض کنیم $x \in [p(A)\cap p(B)] \Leftrightarrow x\in p(A)\ ,\ x\in p(B)$

$\Leftrightarrow x\subseteq A\ ,\ x\subseteq B \Leftrightarrow x\subseteq (A\cap B)\Leftrightarrow x\in p(A\cap B)]$

$\Rightarrow p(A)\cap p(B) = p(A\cap B)$

(توجه دارید که تمام روابط برگشت پذیر بوده و تساوی بین دو مجموعه حاصل شد)

در اثبات رابطه‌ی (II) که در زیر مشاهده خواهید کرد با توجه به رابطه‌ی ذکر شده که قبلاً یک طرفه بودن آن تأکید شد، فقط $p(A)\cup p(B)\subseteq p(A\cup B)$ ثابت می‌شود

فرض کنیم $x\in[p(A)\cup p(B)] \Leftrightarrow x\in p(A)\ ,\ x\in p(B)$

$\Leftrightarrow x\subseteq A\ ,\ x\subseteq B \Rightarrow x\subseteq (A\cup B)\Rightarrow x\in p(A\cup B)]$

$\Rightarrow p(A)\cup p(B)\subseteq p(A\cup B)$

اگر فرض کنیم $A=\{۱\}$ و $B=\{۲,۴\}$ در این صورت $A\cup B=\{۱,۲,۴\}$ و با تشکیل $p(A)$ و $p(B)$ و $p(A\cup B)$ مشاهده می‌کنید که $\{۱,۲,۴\}\in p(A\cup B)$ ولی $\{۱,۲,۴\}\notin p(A)\cup p(B)$ پس عکس رابطه‌ی (II) برقرار نمی‌باشد.

مثال ۶: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow p(A)\cap p(B)=\{\varnothing\}$

حل:

(۱) فرض کنیم $A\cap B=\varnothing\Rightarrow p(A\cap B)=p(\varnothing)=\{\varnothing\}$

(۲) از طرفی: $p(A\cap B)=p(A)\cap p(B)$

$(۱),(۲)\Rightarrow p(A)\cap p(B)=\{\varnothing\}$

فرض کنیم $p(A)\cap p(B)=\{\varnothing\}\xrightarrow{(۲)}$

$p(A\cap B)=\{\varnothing\}\Rightarrow A\cap B=\varnothing$

مثال ۷: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه ثابت کنید:

$p(A-B)\subseteq p(A)-P(B)$

و سپس برای عکس رابطه، مثال نقض بزنید.

فرض کنیم $x\in p(A-B)\Rightarrow x\subseteq (A-B)\xrightarrow{(A-B)\subseteq A}$

$x\subseteq A\ ,\ x\not\subseteq B\Rightarrow x\in p(A)\ ,\ x\notin p(B)\Rightarrow$

$x\in (p(A)-p(B))]\Rightarrow p(A-B)\subseteq p(A)-p(B)$

حال اگر فرض کنیم $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۲,۳\}$ در این صورت

واضح است که، $\{۱,۲\}\in p(A)-p(B)$ در صورتی که $(A-B)=\{۱\}$ و $p(A-B)=\{\varnothing,\{۱\}\}$ و $\{۱,۲\}\notin p(A-B)$ بنابراین عکس رابطه‌ی فوق برقرار نمی‌باشد.

مثال۸: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند ثابت کنید:

$p(A)-p(B)=p(A)-p(A\cap B)$

حل: می‌دانیم در حالت کلی و برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه همواره $(A-B)=A-(A\cap B)$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$p(A)-p(B)=p(A)-[\underbrace{p(A)\cap p(B)}_{p(A\cap B)}]=p(A)-p(A\cap B)$$

نتیجه‌ی مهم: با توجه به این که $|A-B|=|A|-|A\cap B|$ ($|A|$ یعنی تعداد اعضای A) پس می‌توان نوشت:

$$|p(A)-p(B)|=|p(A)|-\left|\underbrace{p(A)\cap p(B)}_{p(A\cap B)}\right|=|p(A)|-|p(A\cap B)|$$

مثال ۹: اگر $A=\{a,\{a\},\{a\},\{a\},b\}$ و $B=\{b,\{a\},\{\{a\}\},\{b\}\}$ در این صورت مجموعه‌ی $p(A)-p(B)$ چند عضو دارد؟

حل: می‌دانیم $A\cap B=\{b,\{a\}\}$ مجموعه‌ای ۲ عضوی است پس،

$|p(A)-p(B)|=|p(A)|-|p(A\cap B)|=۲^۴-۲^۲=۱۶-۴=۱۲$

مثال ۱۰: اگر $A=\{a,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$ در این صورت مجموعه‌ی $p(A)-A$ چند عضو دارد؟

حل: $|p(A)-A|=|p(A)|-|p(A)\cap A|$

بنابراین باید بررسی کنیم که $p(A)$ و A چند عضو مشترک دارند، با توجه به تعریف مجموعه‌ی A واضح است که $\{a\}\in p(A)$ و $\{\{a\}\}\in p(A)$ و $\{a,\{a\}\}\in p(A)$ که همگی اعضای A نیز هستند پس، $|p(A)\cap A|=۳$ و لذا داریم،

$|p(A)|-|p(A)\cap A|=۲^۴-۳=۱۳$

1. power set