

فیثاغورس در جزیره ساموس، نزدیک کرانه‌های ایونی، زاده شد. او در عهد قبل از ارشمیدس، زنون و اودوکس (۵۶۹ تا ۵۰۰ پیش از میلاد) می‌زیست. او در جوانی به سفرهای زیادی رفت و این امکان را پیدا کرد تا با کاهنان مصر، بابل و مغان ایرانی آشنا شود و دانش آن‌ها را بیاموزد. به طوری که معروف است فیثاغورس، دانش مغان را آموخت. او روی هم رفته، ۲۲ سال در سرزمین‌های خارج از یونان بود و چون از سوی پولوکراتوس، شاه یونان، به آمازیس، فرعون مصر سفارش شده بود، توانست به سادگی به رازهای کاهنان مصری دست یابد. او مدت‌ها در این کشور به سر برد و در خدمت کاهنان مصری به شاگردی پرداخت و آگاهی‌ها و باورهای بسیار کسب کرد و از آن‌جا روانه بابل شد و دوران شاگردی را از نو آغاز کرد.

وقتی او در حدود سال ۵۳۰، از مصر بازگشت، در زادگاه خود مکتب اخوتی (که امروزه برجسب مکتب فیثاغورس بر آن خورده است) را بنیان گذاشت. هدف او از بنیان نهادن این مکتب این بود که بتواند مطالب عالی ریاضیات و مطالبی را تحت عنوان نظریه‌های فیزیکی و اخلاقی تدریس کند و پیشرفت دهد. فیثاغورس نیز به مانند سقراط جانب احتیاط را نگاه داشت و چیزی ننوشت. تعلیم وی از طریق شاگردانش به دست ما رسیده است.

شیوه تفکر این مکتب با سنت قدیمی دموکراسی، که در آن زمان بر ساموس حاکم بود، متضاد بود. و چون این مشرب فلسفی با مذاق مردم ساموس خوش نیامد، فیثاغورس به ناچار، زادگاهش را ترک گفت و به سمت شبه جزیره آپنین (از سرزمین‌های وابسته به یونان) رفت و در

در افسانه‌ها چنین آمده است که متعصبان آیینی و سیاسی، توده‌های مردم را علیه او شوراندند که وی راهنمای ایشان کرده بود مکتب و معبد او را آتش زدند و وی در جان سپرد.

ریاضی خویش را با موضوعات فلسفی و باورهای آیینی درهم در عین حال هم عارف و هم ریاضیدان بود و به قولی شهرت او نتیجه نبوغ وی و مابقی ماحصل ارشاد و اوست.

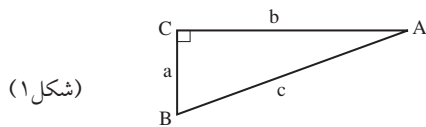


mir_sadr@yahoo.com

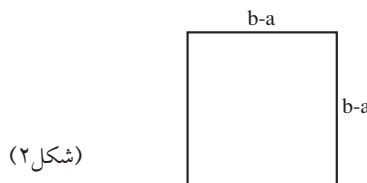
میرشهرام صدر

بلندای خویش

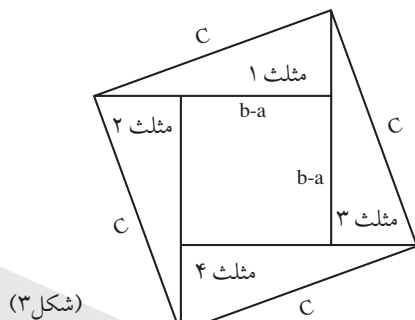
روش عملی اول. برای بررسی درستی قضیه فیثاغورس با روش عملی مراحل زیر را انجام می دهیم.
مرحله ی اول: مثلث قائم الزاویه ABC را با طول ضلع های a، b و c ($c > b > a$) در نظر می گیریم (شکل ۱).



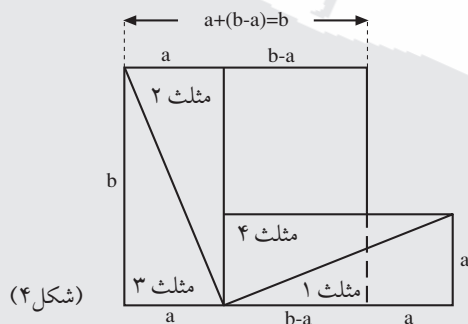
مرحله ی دوم: مربعی به طول $b-a$ به صورت زیر را رسم می کنیم:



مرحله ی سوم: چهار مثلث مانند $\triangle ABC$ در شکل ۱ را در چهار طرف ضلع های این مربع به صورت زیر قرار می دهیم. (شکل ۳)



همان طور که در شکل ۳ ملاحظه می کنید، مربعی به ضلع c به وجود می آید که مساحت آن برابر با $S = c^2$ است.
مرحله ی چهارم: اکنون می خواهیم مساحت شکل ۳ را به روش دیگری محاسبه کنیم، برای این منظور مثلث ۱ را کنار مثلث ۴ و مثلث ۳ را کنار مثلث ۲ قرار می دهیم. (شکل ۴)



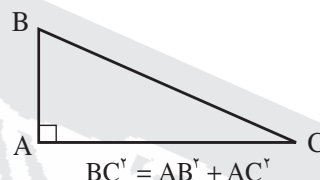
برای آن که نقش فیثاغورس را در تبیین اصول ریاضیات درک کنیم، لازم است کمی درباره جایگاه ریاضیات در عصر وی و پیشرفت هایی که تا زمان وی صورت گرفته بود، بدانیم که این هم به نوبه خود، درخور توجه است. جالب است بدانید با این که مبنای ریاضیات بر «استدلال» استوار است، قبل از فیثاغورس هیچ کس نظر روشنی درباره این موضوع نداشت که استدلال باید مبنی بر مفروضات باشد. به عبارتی استدلال، مسئله ی تعریف شده ای نبود.

در واقع می توان گفت بنا به قول مشهور، فیثاغورس در بین اروپاییان اولین کسی بود که روی این نکته اصرار ورزید که در هندسه باید ابتدا «اصول موضوع» و «اصول متعارفی» را معین کرد و آنگاه به اتکاء آن ها که «مفروضات» هم نامیده می شوند، روش استنتاج متوالی را پیش گرفت به پیش رفت. از نظر تاریخی «اصول متعارفی» عبارت بود از «حقیقتی لازم و خود به خود واضح».

این که فیثاغورس استدلال را وارد ریاضیات کرد، از مهم ترین حوادث علمی است و قبل از فیثاغورس، هندسه عبارت بود از مجموعه قواعدی که ماحصل تجارب و ادراکات متفرق بوده اند؛ تجارب و قواعدی که هیچ گونه ارتباطی با هم نداشتند حتی کسی در آن زمان حدس نمی زد مجموعه ی این قواعد را بتوان از عده ی بسیار کمی اصول نتیجه گرفت. در صورتی که امروزه حتی تصور این موضوع که ریاضیات بدون استدلال چه وضع و حالی داشته است برای ما ممکن نیست. اما در آن عصر این موضوع گام بلندی به سوی نظام قدرتمند هندسه محسوب می شد.

قضیه فیثاغورس

یکی از معروف ترین قضیه ها در هندسه است و اهمیت آن ناشی از کاربردش در حل مسائل هندسه می باشد. از کاربردهای مهم این قضیه می توان در محاسبه ی فاصله ی بین دو نقطه در صفحه و فضا و معادله ی دایره در صفحه (هندسه تحلیلی) نام برد. بیشتر دانش آموزان این قضیه را به خوبی می شناسند و در حل مسائل از آن کمک می گیرند، قضیه ی فیثاغورس می گوید:
«در هر مثلث قائم الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر»



در این مقاله با دو روش عملی درستی قضیه ی فیثاغورس را بررسی کرده، هم چنین درستی قضیه فیثاغورس به روش های جبری و تحلیلی ثابت می کنیم و در انتها؛ با طرح یک مسأله کاربردی، ارتفاع هرم خنوپس را محاسبه می کنیم.

شکل ۴ از دو مربع به ضلع های a و b تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:

$$S = a^2 + b^2$$

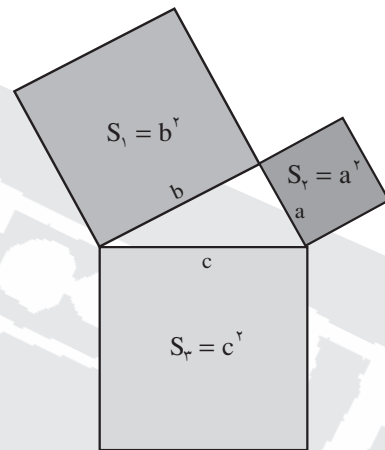
با توجه به مساحت شکل های ۳ و ۴ درمی یابیم که:

$$\begin{cases} S = c^2 \\ S = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

با توجه به رابطه ی اخیر درستی قضیه ی فیثاغورس برقرار است.

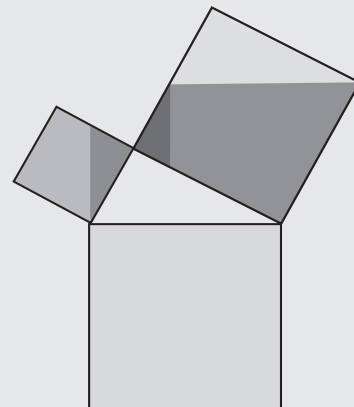


روش عملی دوم. مثلث قائم الزاویه ABC را با طول ضلع های c, b, a ($c > b > a$) در نظر می گیریم و روی وتر این مثلث یک مربع بزرگ به طول c و روی دو ضلع زاویه قائمه دو مربع دیگر به طول های a و b بنا می کنیم. (شکل ۵)



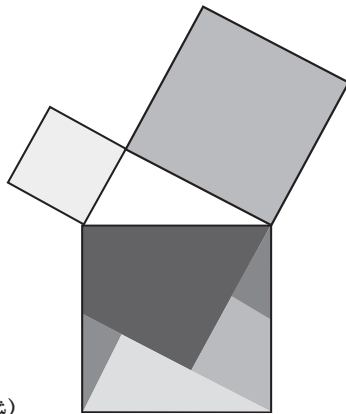
(شکل ۵)

اکنون سطح مربع های کوچک تر را که روی ضلع های زاویه ی بنا شده اند، به قطعات کوچک تری تقسیم می کنیم. (شکل ۶)



(شکل ۶)

در این مرحله می توانیم با قطعات کوچک تری که به دست آورده ایم، سطح مربع بزرگ تر را کاملاً بپوشانیم یا موزاییک کنیم.



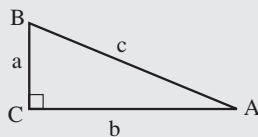
(شکل ۷)

با توجه به دو شکل ۶ و ۷ ملاحظه می کنیم که مجموع مساحت های دو مربع کوچک تر برابر با مساحت مربع بزرگ تر است، از آن جا که مجموع مساحت های دو مربع کوچک تر برابر با $a^2 + b^2$ است و مساحت مربع بزرگ تر برابر با c^2 می باشد، درستی قضیه فیثاغورس برقرار است، یعنی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

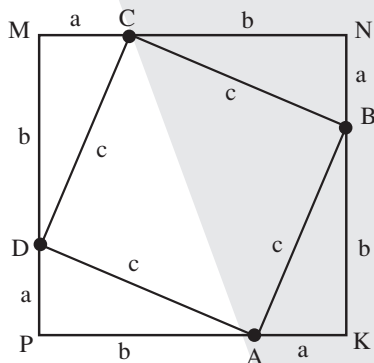
اثبات جبری قضیه ی فیثاغورس

مثلث قائم الزاویه ABC را با طول ضلع های c, b, a ($c > b > a$) در نظر می گیریم.



(شکل ۸)

می خواهیم در این مثلث نشان دهیم که: $c^2 = a^2 + b^2$ برای این منظور شکل زیر را رسم می کنیم (شکل ۹) همان طور که ملاحظه می کنید این شکل از کنار هم قرار گرفتن چهار مثلث مانند $\triangle ABC$ در شکل ۸، به وجود آمده است.



(شکل ۹)

در شکل ۹، یک مربع بزرگ مشاهده می کنید که طول هر ضلع آن برابر با $a+b$ است، در نتیجه مساحت آن برابر است با:

$$S = (a+b)(a+b)$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}} \quad ; \quad \text{در نتیجه داریم:}$$

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad ; \quad m_{AC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{AC}} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_3}{y_3 - y_2}$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) = (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)$$

$$\Rightarrow x_2^2 + y_2^2 - x_2x_3 - x_1x_2 - y_2y_3 - y_1y_2$$

$$= -y_1y_2 - x_1x_3 \quad (2)$$

اکنون رابطه ی (۲) را در رابطه ی (۱) جایگزین می کنیم:

$$BC^2 + AC^2 = x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2(-y_1y_2 - x_1x_3)$$

$$= (x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3) + (y_1^2 + y_3^2 - 2y_1y_2)$$

$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow BC^2 + AC^2 = AB^2$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

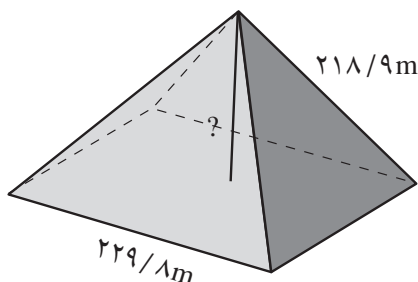
در این قسمت از مقاله به ارائه یک مسأله کاربردی از قضیه

فیثاغورس می پردازیم.

بلندای هرم خنوپس

جیزه یکی از شهرهای کشور مصر است. شهر جیزه در استان جیزه قرار دارد و هرم آن یعنی هرم بزرگ جیزه شهرت جهانی دارد. هرم بزرگ جیزه در اصل همان هرم خنوپس^۱ (کتوپس) بزرگ ترین هرم از اهرام سه گانه ی مصر است. ساخت این هرم در زمان حیات فرعون خنوپس آغاز شد ولی مدت ها بعد از مرگ او به پایان رسید. این هرم هم مانند هرم های دیگر شامل مقبره ی شاه و ملکه به صورت مجزا است که البته بعد از اکتشاف هر دو خالی بوده اند. سطح زیربنای هرم، یک مربع به طول ۲۲۹/۸ متر است و در بنای آن سنگ هایی از یک تن تا چهل تن به کار رفته اند. گفته می شود که حدود ۱۰۰/۰۰۰ کارگر برای ساختن این بنا، بیشتر از ۲۰ سال زحمت کشیده اند.

قاعده ی هرم خنوپس مربعی به طول ۲۲۹/۸ متر و هریال جانبی آن به طول ۲۱۸/۹ متر است. می خواهیم ارتفاع این هرم را پیدا کنیم.



مربع CBAD به ضلع C وجود دارد که مساحت آن برابر با

$$S_1 = c^2 \quad \text{و مساحت هر مثلث قائم الزاویه برابر با } S_2 = \frac{1}{2}ab \quad \text{است؛}$$

با توجه به شکل ۹ ملاحظه می کنید:

$$S_{MNPk} = S_{CBAD} + 4S_{BNC}$$

$$\Rightarrow S = S_1 + 4S_2$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+b) = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

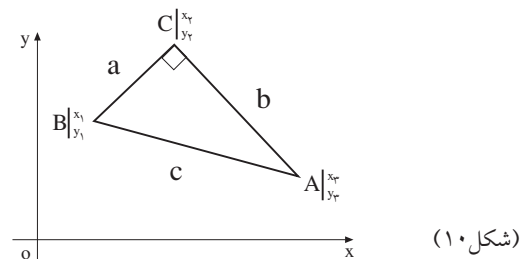
اثبات تحلیلی قضیه ی فیثاغورس

مثلث قائم الزاویه ABC را با مختصات رأس های $B(x_1, y_1)$ ، $A(x_3, y_3)$ و $C(x_2, y_2)$ و طول ضلع های a ، b و c در نظر می گیریم به طوری که $a > b > c$ ، (شکل ۱۰) می خواهیم باروش تحلیلی ثابت کنیم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

برای این منظور طول ضلع های مثلث را به کمک مختصات رأس های آن به دست می آوریم، سپس درستی رابطه ی ذیل را نشان می دهیم:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$



(شکل ۱۰)

$$AB = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

$$BC^2 + AC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$= x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2$$

$$+ x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + y_3^2 + y_2^2 - 2y_2y_3$$

$$= x_1^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_3^2 + 2(x_2^2 + y_2^2)$$

$$- x_2x_3 - x_1x_2 - y_2y_3 - y_1y_2 \quad (1)$$

از طرفی چون مثلث ABC در رأس C قائمه است، پس: