هم‌نهشتی و کاربردهای آن (۴)

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۱ ۱۳ ۱۷ ۱۹ ۲۳ ۲۹ ۳۱ ۳۷ ۴۱ ۴۳... ۲۰۰۳...

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت قبل به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. اینک در این شماره، قضیه‌ی کوچک فرما و کاربردهای آن را در محاسبات باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد توانی و حل معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی nام شرح می‌دهیم و به‌کارگیری این قضیه را برای حل مسئله‌های خلاق و پر ابتکار نشان خواهیم داد.

قضیه‌ی کوچک فرما

اگر p عدد اول مفروض و $(a,p)=1$ آن‌گاه:

$$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

نتیجه: اگر p عدد اول مفروض باشد، آن‌گاه:

$$a^{p} \overset{p}{\equiv} a$$

مثال۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم 2^{87} بر ۷ را تعیین کنید.

حل: با توجه به قضیه‌ی کوچک فرما می‌توان نوشت:

$p;\ 2^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ اول

$$\begin{cases} 7 \in \mathbb{P} & \text{(مجموعه اعداد اول)} \\ (2,7)=1 \end{cases} \xrightarrow[(p=7)]{\text{(فرما)}} 2^{7-1} \overset{7}{\equiv} 1 \ ;$$

$$2^{6} \overset{7}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{(به توان ۱۴)}} (2^{6})^{14} \overset{7}{\equiv} 1$$

$$2^{84} \overset{7}{\equiv} 1 \ ; \ 2^{3} \times 2^{84} \overset{7}{\equiv} 2^{3} \ ; \ 2^{87} \overset{7}{\equiv} 8 \overset{7}{\equiv} 1 \ ; \ 2^{87} \overset{7}{\equiv} 1$$

مثال۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = 5^{12} + 6^{12} + \dots + 17^{12}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی فرما:

$$\begin{cases}13\in\mathbb{P}\\(5,13)=1\end{cases}\xrightarrow{(\text{فرما})} 5^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ ;\ 5^{12}\overset{13}{\equiv}1$$

چون ۶، ۷، ... ۱۲ و هم‌چنین ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷ نسبت به ۱۳ اول هستند و عدد ۱۳ اول است، با استفاده از قضیه‌ی فرما می‌توان نوشت:

$$6^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ ,\ 7^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ ,\ \dots\ ,\ 12^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ (13^{12}\overset{13}{\equiv}0)$$

$$14^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ ,\ 15^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ ,\ 16^{13-1}\overset{13}{\equiv}1\ ,\ 17^{13-1}\overset{13}{\equiv}1$$

از جمع دو طرف هم‌نهشتی‌ها:

$$N = 6^{12}+7^{12}+\dots+17^{12}\overset{13}{\equiv}\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{۱۲ مرتبه}}\overset{13}{\equiv}12$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۱۳ عدد ۱۲ است:

$$N\overset{13}{\equiv}12$$

مثال۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت زیر، بر ۱۱ بر فرض این‌که x، y و z بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشند، چه عددی است؟

$$M = x^{1000}+y^{300}+z^{80}+1382^{1382}$$

حل:

$$11\in\mathbb{P}\ ,\ 11\nmid x\ ;\ (x,11)=1\xrightarrow{(\text{فرما})}x^{11-1}\overset{11}{\equiv}1$$

$$,\ 11\nmid y\ ;\ (y,11)=1\xrightarrow{(\text{فرما})}y^{11-1}\overset{11}{\equiv}1$$

$$,\ 11\nmid z\ ;\ (z,11)=1\xrightarrow{(\text{فرما})}z^{11-1}\overset{11}{\equiv}1$$

پس:

$$x^{10}\overset{11}{\equiv}1\ ,\ y^{10}\overset{11}{\equiv}1\ ,\ z^{10}\overset{11}{\equiv}1$$

$$(x^{10})^{100}\overset{11}{\equiv}1\ ;\ x^{1000}\overset{11}{\equiv}1\ ,\ (y^{10})^{30}\overset{11}{\equiv}1\ ;\ y^{300}\overset{11}{\equiv}1\ ,\ z^{80}\overset{11}{\equiv}1$$

با توجه به بخش‌پذیری بر ۱۱ می توان نوشت:

$$1382^{1382}\overset{11}{\equiv}(2-8+3-1)^{1382}=(-4)^{1382}=(4^{10})^{138}\times(4)^{2}$$

$$\underset{(\text{فرما})}{\overset{11}{\equiv}}(1)^{138}\times16\overset{11}{\equiv}5$$

پس:

$$M = x^{1000}+y^{300}+z^{80}+1382\overset{11}{\equiv}1+1+1+5=8$$

بنابراین:

$$M\overset{11}{\equiv}8$$

مثال۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم 87^{128} بر ۱۹ را بیابید.

حل:

$$87\overset{19}{\equiv}11\ ;\ 87^{128}\overset{19}{\equiv}11^{128}=11^{18\times7}\times11^{2}=(11^{7})^{18}\times121$$

$$(11^{7})^{19-1}\times121\underset{(\text{فرما})}{\overset{19}{\equiv}}1\times7=7\ ;\ 87^{128}\overset{19}{\equiv}7$$

مثال۵. عدد $(7^{15}+k)$ مضرب ۱۷ است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases}17\in\mathbb{P}\\(7,17)=1\end{cases}\xrightarrow{(\text{فرما})}7^{17-1}\overset{17}{\equiv}1\ ;\ 7^{16}\overset{17}{\equiv}1$$

$$7^{16}\overset{17}{\equiv}1+2(17)=35\ \Rightarrow\ 7^{15}\overset{17}{\equiv}5\overset{17}{\equiv}5-17=-12\ ;$$

$$7^{15}+12\overset{17}{\equiv}0\ ;\ k=12$$

مثال۶. اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۷ باشد، ثابت کنید که عدد $N = p^{12}-1$ بر ۱۰۵ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری ۱۰۵=۳×۵×۷ و قضیه‌ی کوچک فرما (p عدد اول بزرگ‌تر از ۷):

$$(p,3)=1\ ;\ p^{3-1}\overset{3}{\equiv}1\ ;\ p^{2}\overset{3}{\equiv}1\ ;\ (p^{2})^{6}\overset{3}{\equiv}1\ ;\ p^{12}\overset{3}{\equiv}1$$

$$(p,5)=1\ ;\ p^{5-1}\overset{5}{\equiv}1\ ;\ p^{4}\overset{5}{\equiv}1\ ;\ (p^{4})^{3}\overset{5}{\equiv}1\ ;\ p^{12}\overset{5}{\equiv}1$$

$$(p,7)=1\ ;\ p^{7-1}\overset{7}{\equiv}1\ ;\ p^{6}\overset{7}{\equiv}1\ ;\ (p^{6})^{2}\overset{7}{\equiv}1\ ;\ p^{12}\overset{7}{\equiv}1$$

با توجه به هم‌نهشتی‌های اخیر، بدیهی است که ۳، ۵ و ۷ عدد $N = p^{12}-1$ را می‌شمارند. بنابراین، حاصل ضرب این سه عدد نیز N را می‌شمارد: $3\times5\times7=105\mid N = p^{12}-1$.

مثال۷. باقی‌مانده‌ی عدد $(31^{28}+29^{30})^{1387}$ بر ۸۹۹ را تعیین کنید.

حل: در حالت کلی نشان می‌دهیم که اگر p و q دو عدد اول متمایز و m و n دو عدد طبیعی باشند، داریم:

$$p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{pq}{\equiv}1$$

$$\begin{cases}\text{اول}\quad p,(p,q)=1\ ;\ p^{q-1}\overset{q}{\equiv}1\ ,\ q^{p-1}\overset{q}{\equiv}0\longrightarrow p^{q-1}+q^{p-1}\overset{q}{\equiv}1\\ \text{اول}\quad q,(p,q)=1\ ;\ q^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\ ,\ p^{q-1}\overset{p}{\equiv}0\longrightarrow p^{q-1}+q^{p-1}\overset{p}{\equiv}1\end{cases}$$

از رابطه‌های هم‌نهشتی اخیر:

$$p^{q-1}+q^{p-1}\overset{pq}{\equiv}1$$

هم‌چنین:

$$\begin{cases}(p,q)=۱;\ p^{q-1}\overset{q}{\equiv}۱;\ p^{m(q-1)}\overset{q}{\equiv}۱,\ q^{p-1}\overset{q}{\equiv}۰;\ q^{n(p-1)}\overset{q}{\equiv}۰\\ (p,q)=۱;\ q^{p-1}\overset{p}{\equiv}۱;\ \underset{(\text{فرما})}{p^{n(q-1)}}\overset{p}{\equiv}۱,\ p^{q-1}\overset{p}{\equiv}۰;\ p^{m(q-1)}\overset{p}{\equiv}۰\end{cases}$$

از جمع هم‌نهشتی‌ها:

$$p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{q}{\equiv}۱,\quad p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{p}{\equiv}۱$$

از دو هم‌نهشتی فوق:

$$q,p\ \text{اول}\ ,\ (p,q)=۱;\ p^{m(q-1)}+q^{n(p-1)}\overset{pq}{\equiv}۱$$

$$p=۲۹,\ q=۳۱:\ (۲۹^{۳۰}+۳۱^{۲۸})^{۱۳۸۷}\overset{۸۹۹}{\equiv}۱(۸۹۹=۲۹\times۳۱)$$

مثال۸. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۱۵ تعیین کنید.

$$N=۲^۱+۲^۲+۲^۳+\dots+۲^{۱۳۸۸}$$

حل:

از هم‌نهشتی $۲^۴\overset{۱۵}{\equiv}۱$ نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\underbrace{۲^{۴n}\overset{۱۵}{\equiv}۱}_{\text{باقی‌مانده۱}}\xrightarrow{(\times۲)}\underbrace{۲^{۴n+۱}\overset{۱۵}{\equiv}۲}_{\text{باقی‌مانده۲}}\xrightarrow{(\times۲)}\underbrace{۲^{۴n+۲}\overset{۱۵}{\equiv}۴}_{\text{باقی‌مانده۴}}\xrightarrow{(\times۲)}\underbrace{۲^{۴n+۳}\overset{۱۵}{\equiv}۸}_{\text{باقی‌مانده ۸}}$$

بنابراین:

$$N=۲^۱+۲^۲+۲^۳+۲^۴+\dots+۲^{۱۳۸۵}+۲^{۱۳۸۶}+۲^{۱۳۸۷}+۲^{۱۳۸۸}$$

$$N\overset{۱۵}{\equiv}\underbrace{۲+۴+۸+۱}_{\text{دسته‌ی باقی‌مانده‌های دوره‌ی اول}}+\dots+\underbrace{۲+۴+۸+۱}_{\text{دسته‌ی باقی‌مانده‌های دوره‌ی آخر}}=\frac{۱۳۸۸}{۴}(\overbrace{۲+۴+۸+۱}^{۱۵})=۳۴۷\times۱۵$$

پس: $N\overset{۱۵}{\equiv}۳۴۷\times۱۵\overset{۱۵}{\equiv}۰$

بنابراین، N بر ۱۵ بخش‌پذیر است:

$$N\overset{۱۵}{\equiv}۰$$

مثال۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=۲^{۲^۱}+۲^{۲^۲}+۲^{۲^۳}+۲^{۲^۴}+\dots+۲^{۲^{۱۳۸۷}}$ را بر ۱۱ بیابید.

حل: از هم‌نهشتی بدیهی $۲^{۲^۱}\overset{۱۱}{\equiv}۴$ به نتایج زیر می‌رسیم:

$$(۲^{۲^۱})^۲\overset{۱۱}{\equiv}۴^۲=۱۶\overset{۱۱}{\equiv}۵;\ ۲^{۲^۲}\overset{۱۱}{\equiv}۵,\ (۲^{۲^۲})^۲\overset{۱۱}{\equiv}۵^۲$$

$$۲^{۲^۳}\overset{۱۱}{\equiv}۲۵\equiv۳,\ (۲^{۲^۳})^۲\overset{۱۱}{\equiv}۳^۲;\ ۲^{۲^۴}\overset{۱۱}{\equiv}۹,\ (۲^{۲^۴})^۲\overset{۱۱}{\equiv}۹^۲;$$

$$۲^{۲^۵}\overset{۱۱}{\equiv}۸۱\overset{۱۱}{\equiv}۴,\dots$$

از تقسیم متوالی جمله‌ها بر ۱۱ به ترتیب باقی‌مانده‌های تکراری ۴، ۵، ۳و۹ حاصل می‌شوند؛ پس:

$$N=۲^{۲^۱}+۲^{۲^۲}+۲^{۲^۳}+۲^{۲^۴}+\dots+۲^{۲^{۱۳۸۷}}\overset{۱۱}{\equiv}$$

$$\underbrace{\overbrace{(۴+۵+۳+۹)}^{۲۱}+\dots}_{\text{تعداد ۳۴۶ پرانتز چهار جمله‌ای}}+\overbrace{\underbrace{(۴+۵+۳)}_{۱۲}}^{\text{سه جمله‌ی منفرد آخر}}$$

$$N\overset{۱۱}{\equiv}۳۴۶(۲۱)+۱۲\overset{۱۱}{\equiv}(۶-۴+۳)(۱۰)+۱=۵۱$$

$$N\overset{۱۱}{\equiv}۵۱\overset{۱۱}{\equiv}۷;\ N\overset{۱۱}{\equiv}۷$$

مثال۱۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۴۱ بیابید.

$$N=۲^{۱!}+۲^{۲!}+۲^{۳!}+۲^{۴!}+\dots+۲^{۱۳۸۷!}$$

حل: با توجه به این‌که ۴۱ عدد اول است و $(۲,۴۱)=۱$، از قضیه‌ی کوچک فرما، داریم:

$$۲^{۴۱-۱}\overset{۴۱}{\equiv}۱;\ ۲^{۴۰}\overset{۴۱}{\equiv}۱;\ ۲^{۴۰k}\overset{۴۱}{\equiv}۱$$

با توجه به این‌که اگر $n\ge۵$ باشد، آن‌گاه $n!$ مضرب ۴۰ خواهد بود:

$$n\ge۵:\ ۲^{n!}=۲^{۴۰k}\overset{۴۱}{\equiv}۱$$

بنابراین:

$$N=۲^{۱!}+۲^{۲!}+۲^{۳!}+۲^{۴!}+۲^{۵!}+\dots+۲^{۱۳۸۷!}$$

$$\overset{۴۱}{\equiv}۲^۱+۲^۲+۲^۶+۲^{۲۴}+\underbrace{۱+۱+\dots+۱}_{\text{تعداد یک‌ها}=۱۳۸۷-۴}$$

$$N\overset{۴۱}{\equiv}۲+۴+۶۴+۱۶^*+۱۳۸۳=۱۴۶۹\overset{۴۱}{\equiv}۳۴;\ N\overset{۴۱}{\equiv}۳۴$$

$$*(۲^۷=۱۲۸\overset{۴۱}{\equiv}۵;\ (۲^۷)^۳\overset{۴۱}{\equiv}۵^۳;\ ۲^{۲۱}\overset{۴۱}{\equiv}۱۲۵\overset{۴۱}{\equiv}۲;\ ۲^{۲۴}\overset{۴۱}{\equiv}۱۶)$$

مثال۱۱ . اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\overline{x۵۱y}$ بر ۷۲ برابر صفر شود، تقسیم $N=(y^x+x^y)^{۱۳۸۷}$ بر ۸۰ چه باقی‌مانده‌ای خواهد داشت؟

حل . بدیهی است که با توجه به ۹×۸=۷۲، عدد $\overline{x۵۱y}$ بر ۸و۹ بخش‌پذیر است؛ پس:

$$\begin{cases}\overline{x۵۱y}\overset{۸}{\equiv}۰;\ \overline{۵۱y}\overset{۸}{\equiv}۰;\ ۵۱۰+y\overset{۸}{\equiv}۰\\ \overline{x۵۱y}\overset{۹}{\equiv}۰;\ x+۵+۱+y\overset{۹}{\equiv}۰;\ x+y+۶\overset{۹}{\equiv}۰\end{cases}$$

از حل دستگاه فوق مقادیر xو y به دست می‌آید:

$$۵۱۰+y\overset{۸}{\equiv}۰;\ y\overset{۸}{\equiv}-۵۱۰;\ y\overset{۸}{\equiv}-۵۱۰+۸(۶۴)=۲;\ y\overset{۸}{\equiv}۲$$

چون y یک رقمی است، بنابراین از هم‌نهشتی بالا جواب $y=۲$ حاصل می‌شود.

$$x+y+۶\overset{۹}{\equiv}۰;\ x+۲+۶\overset{۹}{\equiv}۰;\ x\overset{۹}{\equiv}-۸;\ x\overset{۹}{\equiv}-۸+۹=۱;\ x\overset{۹}{\equiv}۱$$

چون x یک رقمی است، بنابراین از هم‌نهشتی بالا جواب $x=۱$ حاصل می‌شود.

$$N=(۲^۱+۱^۲)^{۱۳۸۷}=۳^{۱۳۸۷};\ ۳^۴=۸۱\overset{۸۰}{\equiv}۱,\ (۳^۴)^{۳۴۶}\overset{۸۰}{\equiv}۱$$

$$۳^{۱۳۸۴}\overset{۸۰}{\equiv}۱;\ ۳^۳\times۳^{۱۳۸۴}\overset{۸۰}{\equiv}۳^۳;\ ۳^{۱۳۸۷}\overset{۸۰}{\equiv}۲۷;\ N\overset{۸۰}{\equiv}۲۷$$

مثال۱۲ . اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید که $M=(\frac{n^۵}{۵}+\frac{n^۳}{۳}+\frac{۷n}{۱۵})^{۲۰۰۹}$ نیز عددی صحیح است.

حل: با توجه به برابری زیر:

$$\frac{n^۵}{۵}+\frac{n^۳}{۳}+\frac{۷n}{۱۵}=\frac{۳n^۵+۵n^۳+۷n}{۱۵}$$

کافی است، نشان دهیم برای هر n داریم:

$$۱۵|(۳n^۵+۵n^۳+۷n)$$

و یا برای هر n، عدد $۳n^۵+۵n^۳+۷n$ بر ۳و۵ بخش‌پذیر است. هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$$۳n^۵+۵n^۳+۷n\overset{۳}{\equiv}۲n^۳+n\overset{۳}{\equiv}۲n^۳-۲n=۲(n^۳-n)\underset{(\text{فرما})}{\overset{۳}{\equiv}}۰$$

$$۳n^۵+۵n^۳+۷n\overset{۵}{\equiv}۳n^۵+۲n\overset{۵}{\equiv}۳n^۵-۳n=۳(n^۵-n)\underset{(\text{فرما})}{\overset{۵}{\equiv}}۰$$

بنابراین، طبق قضیه‌ی فرما $((a,p)=۱\ ;\ a^p\overset{p}{\equiv}a)$ نتیجه می‌شود که M عددی صحیح است.

مثال۱۳. با استفاده از قضیه‌ی کوچک فرما، معادله‌ی هم‌نهشتی زیر را حل کنید:

$$(x^{۳۵}+۲۲x^{۱۹}+۲۸x^۳)^{۱۳۸۸}\overset{۱۷}{\equiv}۰$$

حل: با توجه به قضیه‌ی فرما $(x^{۱۷}\overset{۱۷}{\equiv}x)$، هم‌نهشتی‌های زیر برای هر x بدیهی است:

$$x^{۱۷}\overset{۱۷}{\equiv}x\ ;\ x^{۳۴}\overset{۱۷}{\equiv}x^۲\ ;\ x^{۳۵}\overset{۱۷}{\equiv}x^۳$$

$$۲۲x^{۱۹}\overset{۱۷}{\equiv}۵x^{۱۹}\overset{۱۷}{\equiv}۵x^۲.x^{۱۷}\overset{۱۷}{\equiv}۵x^۲.x=۵x^۳\ ,\ ۲۸x^۳\overset{۱۷}{\equiv}۱۱x^۳$$

بنابراین:

$$(x^{۳۵}+۲۲x^{۱۹}+۲۸x^۳)^{۱۳۸۸}\overset{۱۷}{\equiv}(x^۳+۵x^۳+۱۱x^۳)^{۱۳۸۸}=$$

$$(۱۷x^۳)^{۱۳۸۸}\overset{۱۷}{\equiv}۰(x\in Z)$$

معادله‌ی هم‌نهشتی، در واقع یک اتحاد همیشه برقرار است و به ازای هر x، صحیح و درست است. روش دیگر این است که معادل عبارت را بر $(x^{۱۷}-x)$ تقسیم کنیم:

$$(x^{۳۵}+x^{۱۹}+x^۳)^{۱۳۸۸}\overset{۱۷}{\equiv}[(x^{۱۷}-x)(x^{۱۸}+۶x^۲+۱۷x^۳)]^{۱۳۸۸}$$

مثال۱۴. با استفاده از قضیه‌ی کوچک فرما نشان دهید که برای هر عدد اول $p>۵$، بی‌نهایت عدد به صورت $N=۹۹۹...۹۹۹۹$ وجود دارند که بر p بخش‌پذیرند.

حل: در واقع باید نشان دهیم، هم‌نهشتی $۱۰^n\overset{p}{\equiv}۱$ برای بی‌نهایت عدد مثبت صحیح برقرار است.

از آن‌جا که $p>۵$ و $(p,۱۰)=۱$ و بنابر قضیه‌ی کوچک فرما $۱۰^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$، پس هر عدد صحیح n که مضربی از $(p-۱)$ است، جواب مسئله خواهد بود: $n=k(p-۱)$

مثال۱۵. اگر p عددی اول باشد و $x^p+y^p=z^p$، توسط قضیه‌ی کوچک فرما ثابت کنید که p عبارت $(x+y-z)$ را می‌شمارد.

حل: بر طبق قضیه‌ی فرما $(x^p\overset{p}{\equiv}x)$، بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$x^p+y^p-z^p\overset{p}{\equiv}x+y-z$$

بنابراین، اگر $x^p+y^p\overset{p}{\equiv}z^p$ باشد، آن‌گاه: $x+y-z\overset{p}{\equiv}۰$. به روش دیگر، به سادگی از جمع جبری $x^p\overset{p}{\equiv}x$ ، $y^p\overset{p}{\equiv}y$ و $z^p\overset{p}{\equiv}z$ می‌توان نوشت:

$$x^p+y^p-z^p\overset{p}{\equiv}x+y-z$$

از فرض اول بودن p و برابری $x^p+y^p=z^p$:

$$\underbrace{x^p+y^p}_{z^p}-z^p\overset{p}{\equiv}z^p-z^p=۰$$

بنابراین:

$$x+y-z\overset{p}{\equiv}۰\quad (p|(x+y-z))$$

تعیین رقم یکان عدد

برای تعیین رقم یکان هر عد مانند N، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰ تعیین کنیم:

$$N\overset{۱۰}{\equiv}r<۱۰$$

نتیجه: اگر $n\ge ۵$ باشد، آن‌گاه: $n!\overset{۱۰}{\equiv}۰$

در واقع اگر $n\ge ۵$، رقم یکان عدد $n!$ برابر صفر است.

مثال ۱۶. رقم یکان عدد $N=۱!+۲!+۳!+...+۱۳۸۸!$ را تعیین کنید.

حل: کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۱۰ را تعیین کنیم که در واقع همان رقم یکان است:

$$N=۱!+۲!+۳!+۴!+۵!+...+۱۳۸۸!\overset{۱۰}{\equiv}۱+۲+۶+۲۴+۰+۰+...+۰$$

$$N\overset{۱۰}{\equiv}۳۳\overset{۱۰}{\equiv}۳ \text{ و } N\overset{۱۰}{\equiv}۳\ (\text{رقم یکان } N)$$

مثال۱۷. رقم یکان عدد زیر را تعیین کنید.

$$N=۱۳۸۹^۱+۱۳۸۹^۲+۱۳۸۹^۳+...+۱۳۸۹^{۱۳۸۷}$$

حل: کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد Nرا بر ۱۰ تعیین کنیم:

$$N=۱۳۸۹^۱+۱۳۸۹^۲+۱۳۸۹^۳+...+۱۳۸۹^{۱۳۸۷}\overset{۱۰}{\equiv}(-۱)^۱+(-۱)^۲+(-۱)^۳+...+(-۱)^{۱۳۸۷}$$

$$N\overset{۱۰}{\equiv}-۱+۱-۱+...+۱-۱=-۱\overset{۱۰}{\equiv}۹\ ;\ N\overset{۱۰}{\equiv}۹$$

بنابراین، رقم یکان عدد N برابر ۹ است.

تعیین رقم یکان اعداد توان‌دار

برای تعیین رقم یکان اعداد توان‌دار، کافی است توان عدد را بر

۴ تقسیم کنیم که در این صورت دو حالت برای باقی‌مانده پیش می‌آید. حالت اول این است که باقی‌مانده صفر شود. در این حالت به جای توان، عدد ۴ را جای‌گزین می‌کنیم. حالت دوم باقی‌مانده‌ی غیرصفر است که در این حالت به جای توان عدد، همان عدد باقی‌مانده‌ی غیر صفر را قرار می‌دهیم:

$$a^n \overset{10}{\equiv} \begin{cases} a^4 & \text{n بر ۴ بخش‌پذیر باشد} \\ a^r & \text{n بر ۴ باقی‌مانده‌ی ناصفر r دهد} \end{cases}$$

نکته: اگر رقم یکان عددی یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۵ یا ۶ باشد، تمام توان‌های طبیعی آن عدد نیز دارای همان رقم یکان خواهند بود:

$$a \overset{10}{\equiv} 0 \;;\; a^n \overset{10}{\equiv} 0 \;;\; a \overset{10}{\equiv} 1 \;;\; a^n \overset{10}{\equiv} 1$$

$$a \overset{10}{\equiv} 5 \;;\; a^n \overset{10}{\equiv} 5 \;;\; a \overset{10}{\equiv} 6 \;;\; a^n \overset{10}{\equiv} 6$$

برای تعیین رقم یکان یک عدد، از هم‌نهشتی‌های زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

$$a \overset{10}{\equiv} 3 \;;\; a^{2n} \overset{10}{\equiv} 1 \;,\; a \overset{10}{\equiv} 2 \text{ یا } 8 \;;\; a^{4n} \overset{10}{\equiv} 6$$

$$a \overset{10}{\equiv} 9 \;;\; a^n \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 1 & \text{n زوج} \\ 9 & \text{n فرد} \end{cases} ,\; a \overset{10}{\equiv} 4 \;;\; a^n \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 4 & \text{n فرد} \\ 6 & \text{n زوج} \end{cases}$$

مثال ۱۸. رقم یکان عدد زیر را تعیین کنید.

$$M = 101^{1389} + 102^{1389} + \cdots + 989^{1389}$$

حل: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۸۹ بر ۴ برابر ۱ است. پس:

$$M \overset{10}{\equiv} \underbrace{101^1 + 102^1 + \cdots + 989^1}_{\text{تعداد جملات}=889} = \frac{889}{2}(2\times 101 + 888(1))$$

$$M \overset{10}{\equiv} \frac{889}{2} \times 1090 = 889 \times 545 \overset{10}{\equiv} 9 \times 5 = 45 \overset{10}{\equiv} 5 \;;\; M \overset{10}{\equiv} 5$$

(رقم یکان M)

مثال ۱۹: رقم یکان عدد زیر را بیابید.

$$N = (1388)^{2!} + (1388)^{4!} + \cdots + (1388)^{1000!}$$

حل: با توجه به ($a^n \overset{10}{\equiv} a^4$ (n بر ۴ بخش‌پذیر، می‌توان نوشت:

$$N \overset{10}{\equiv} (-2)^2 + \underbrace{(-2)^4 + (-2)^4 + (-2)^4 + \cdots + (-2)^4}_{\text{۴۹۹ جمله}} =$$

$$2^2 + 499 \times 2^4 \overset{10}{\equiv} 4 + (-1)(-4)$$

$N \overset{10}{\equiv} 8$ (رقم یکان N)

مثال ۲۰: رقم یکان عدد M را بیابید.

$$M = 1387^{11} + 1387^{14} + 1387^{17} + \cdots + 1387^{1388}$$

حل: تعداد جملات عدد M برابر $\left(1 + \frac{1388-11}{3}\right)$ یا ۴۶۰ است و با توجه به هم‌نهشتی $1387^k \overset{10}{\equiv} 7^k$، برای تعیین رقم یکان M می‌توان رقم یکان مجموع زیر را تعیین کرد:

$$M \overset{10}{\equiv} 7^{11} + 7^{14} + 7^{17} + \cdots + 7^{1388}$$

از طرف دیگر، با توجه به هم‌نهشتی $7^3 \overset{10}{\equiv} 3$ یا $7^{n+3} \overset{10}{\equiv} 3(7^n)$، می‌توان نوشت ($7^{11} \overset{10}{\equiv} 3$):

$$M \overset{10}{\equiv} \underbrace{\overbrace{(3+9+7+1)}^{20} + \overbrace{(3+9+7+1)}^{20} + \cdots + \overbrace{(3+9+7+1)}^{20}}_{\text{پرانتز چهارجمله‌ای } \frac{460}{4}=115}$$

$M \overset{10}{\equiv} 115 \times 20 \overset{10}{\equiv} 0 \;;\; M \overset{10}{\equiv} 0$ (رقم یکان M)

مثال ۲۱. رقم یکان عدد $N = (1!)^1 + (2!)^2 + \cdots + (2008!)^{1387}$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به این نکته که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $n!$ برای هر $n \geq 5$ بر ۱۰ برابر صفر است:

$$N \overset{10}{\equiv} 1 + 2^2 + 6^3 + 24^4 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 0$$

$N \overset{10}{\equiv} 1 + 4 + 6 + 6 = 17 \overset{10}{\equiv} 7 \;;\; N \overset{10}{\equiv} 7$ (رقم یکان N)

مثال ۲۲. رقم یکان عدد $N = (1388)^{2008!} + (1389)^{2009!}$ را بیابید.

حل: اعداد !۲۰۰۸ و !۲۰۰۹ بر ۴ بخش‌پذیرند. بنابراین به جای هریک ۴ قرار می‌دهیم:

$N \overset{10}{\equiv} (-2)^4 + (-1)^4 = 16 + 1 = 17 \overset{10}{\equiv} 7 \;;\; N \overset{10}{\equiv} 7$ (رقم یکان N)

مثال ۲۳. رقم یکان عدد $M = (1387)^{88k+3} + (2007)^{44k+4}$ را تعیین کنید.

حل:

$$M \overset{10}{\equiv} 7^{88k+3} + 7^{44k+4} \overset{10}{\equiv} 7^3 + 7^4 \overset{10}{\equiv} 7(-1) + (-1)^2$$

(رقم یکان M)

$$M \overset{10}{\equiv} -7 + 1 = -6 \overset{10}{\equiv} 4 \;;\; M \overset{10}{\equiv} 4$$

مثال ۲۴. رقم یکان عدد $N = 1387^{7^{7^7}}$ را بیابید.

حل: رقم یکان N معادل رقم یکان $M = 7^{7^{7^7}}$ است؛ بنابراین:

$$7^7 \overset{2}{\equiv} 1^7 = 1 \;;\; 7^7 = 2t + 1 \;;\; 7^{7^7} = 7^{2t+1} = (7^2)^t \times 7 = 49^t \times 7$$

$$7^{7^7} \overset{4}{\equiv} (1)^t(3) = 3 \;;\; 7^{7^7} = 4k + 3 \;;\; M = 7^{4k+3}$$

$$M \overset{10}{\equiv} 7^3 = 7^2 \times 7 \overset{10}{\equiv} (-1)(-3) = 3 \;;\; M \overset{10}{\equiv} 3 \;;\; N \overset{10}{\equiv} 3$$

(رقم یکان N)

مثال۲۵ . بافرض

$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \cdots + (1387!)^{2008}$ ، رقم یکان $S = M^{M^M}$ را بیابید .

حل :

$$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + (4!)^4 + \cdots + (1387!)^{2008} \overset{4}{\equiv} 1 + 2^2 + 6^3 + 0 + 0 + \cdots + 0 \ ;$$

$$M \overset{4}{\equiv} 1 \ ; \ M^M \overset{4}{\equiv} 1 \ ; \ M^M = 4k + 1$$

$$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \cdots + (1387!)^{2008} \overset{10}{\equiv} 1 + 2^2 + 6^3 + 24^4 + 0 + 0 + \cdots$$

$$M \overset{10}{\equiv} 1 + 4 + 6 + 6 = 17 \overset{10}{\equiv} 7 \ ; \ S = M^{M^M} \overset{10}{\equiv} 7^{4k+1} \overset{10}{\equiv} 7 \ ; \ S \overset{10}{\equiv} 7$$

(رقم یکان S)

تمرین

۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 4^{1001} بر ۲۰۰۳ را توسط قضیه‌ی کوچک فرما بیابید .

۲ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد

$M = (7^{12} + 8^{12} + 9^{12} + \cdots + 19^{12})^{1389}$ را بر ۱۳ بیابید .

۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت

$N = (x^{2000} + y^{900} + z^{800})^{2009}$ بر ۱۱ ، با فرض این‌که x ، y و z بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشند ، چه عددی است؟

۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M = (38^{88} + 87^{128})^{89}$ را بر ۱۹ بیابید .

۵ . عدد $N = 7^{2008} + k$ مضرب ۱۷ است . کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید .

۶ . اگر p عدد اول بزرگ‌تر از ۷ باشد ، ثابت کنید که عدد $M = p^{12} - 1$ بر اعداد ۱۵ ، ۲۱ ، ۳۵ و ۱۰۵ بخش‌پذیر است .

۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = (29^{30} + 31^{28} - 2)^{2009}$ را بر ۸۹۹ بیابید .

۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M = (5^{2010} + 7^{2012})^{2009}$ را بر ۳۵ تعیین کنید .

۹ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد

$N = 1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + \cdots + 4004^{2003}$ را بر ۲۰۰۳ بیابید .

۱۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد

$M = 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{2009}$ را بر ۸ بیابید .

۱۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد

$N = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2008}$ را بر ۱۵ تعیین کنید (با سه روش) .

۱۲ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد

$M = 2^{2^1} + 2^{2^2} + 2^{2^3} + 2^{2^4} + \cdots + 2^{2^{2009}}$ را بر ۱۱ بیابید .

۱۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد

$N = 3^1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \cdots + 3^{2009}$ را بر ۱۳ بیابید .

۱۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد

$M = 2^{1!} + 2^{2!} + 2^{3!} + 2^{4!} + \cdots + 2^{2009!}$ را بر ۴۱ بیابید .

۱۵ . اگر باقی‌مانده‌ی عدد $M = \overline{x51y}$ را بر ۷۲ برابر صفر شود ، باقی‌مانده‌ی عدد $N = (y^{x^{2009}} + x^{y})^{1389}$ را بر ۸۰ بیابید .

۱۶ . رقم یکان عدد $N = 1! + 2! + 3! + \cdots + 2009!$ را تعیین کنید .

۱۷ . رقم یکان عدد $M = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2009)!$ را بیابید .

۱۸ . رقم یکان عدد

$N = (2009^1 + 2009^2 + 2009^3 + \cdots 2009^{2009})^{2009}$ را بیابید .

۱۹ . رقم یکان عدد $M = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{2009}$ را بیابید .

۲۰ . رقم یکان عدد

$N = 101^{2009} + 102^{2009} + \cdots + 989^{2009}$ را بیابید .

۲۱ . رقم یکان عدد

$M = (2008)^{2!} + (2008)^{4!} + \cdots + (2008)^{1000!}$ را بیابید .

۲۲ . رقم یکان عدد

$N = (2007)^{11} + (2007)^{14} + (2007)^{17} + \cdots + (2007)^{2009}$ را بیابید .

۲۳ . رقم یکان عدد

$M = (1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \cdots + (1388!)^{2009}$ را بیابید .

۲۴ . اگر داشته باشیم :

$M = 1! + 3! + 5! + \cdots + 2009!$ و $N = 2! + 4! + 6! + \cdots + 2008!$

رقم یکان عدد $S = (M^N + N^M)^{1389}$ را تعیین کنید .

۲۵ . رقم یکان عدد $N = (2008)^{1388!} + (2009)^{1389!}$ را بیابید .

۲۶ . رقم یکان عدد $M = (2007)^{88k+2} + (1387)^{44k+4}$ را تعیین کنید .

۲۷ . رقم یکان عدد $N = 1387^{7^{7^7}} + 2007^{7^{7^7}}$ را بیابید .

۲۸ . رقم یکان عدد $S = M^{M^M}$ را با فرض $M = (1!)^1 + (2!)^2 + \cdots + (2009!)^{1389}$ بیابید .

۲۹ . رقم سمت راست عدد

$N = (1! + 3! + \cdots + 2009!)(2! + 4! + \cdots + 2008!)$ را بیابید .

۳۰ . با استفاده از قضیه‌ی فرما ، یک سری از جواب‌های عمومی معادله‌ی $x^p + y^p = z^m$ را با فرض $(p, m) = 1$ به دست آورید . (p اول است) . (رجوع شود به رشد برهان ۵۴)

❐❐❐