هیچ مربعی منفی نیست

در این بخش، بعضی از کاربردهای ساده‌ترین نابرابری موجود در جبر، یعنی:

$$x^2 \geq 0$$

را بررسی می‌کنیم؛ رابطه‌ای که در آن برابری اگر و تنها اگر عدد حقیقی $x = 0$ باشد، برقرار است. اینک اولین مثال:

● فرض می‌کنیم a عددی حقیقی باشد. ثابت کنید:

$$4a - a^4 \leq 3$$

حل: این مسئله برای دانش‌آموزانی طرح شده بود که کتاب جامع و فاضل یا دیفرانسیل و انتگرال را، حتی ورق هم نزده بودند. نابرابری مورد بحث هم‌ارز

$$(a^2 - 1)^2 + 2(a - 1)^2 \geq 0$$

است که به‌طور واضح برقرار است.

مثال دوم از المپیادهای ریاضی رومانیایی ۱۹۸۱ است که توسط **آندریسکو**[1] طرح شده است.

● معین کنید، تابع یک به یک $f = R \to R$ با این ویژگی که به ازای هر x،

$$f(x^2) - f^2(x) \geq \frac{1}{4}$$

موجود است یا خیر.

حل: نشان می‌دهیم چنین تابعی موجود نیست. روش کار بسیار ساده است. به دو عددی می‌نگریم که با مربعاتشان برابرند؛ یعنی، $x = 0$ و $x = 1$، که در مورد آن‌ها $f(x)$ و $f(x^2)$ برابرند. با قرار دادن $x = 0$ در رابطه‌ی مفروض، به‌دست می‌آوریم:

$$f(0) - f^2(0) \geq \frac{1}{4}$$

با بردن تمام عبارات به سمت راست، خواهیم داشت:

$$0 \geq \left(f(0) - \frac{1}{2}\right)^2$$

این رابطه مستلزم آن است که $f(0) = \frac{1}{2}$. به همین ترتیب، اگر

با راهیان المپیادهای ریاضی (۱۱)

● **غلامرضا یاسی‌پور**

$x=1$ را قرار دهیم، به دست می‌آوریم $f(1)=\frac{1}{2}$ که مانند $f(0)$ است. به این ترتیب f نمی‌تواند یک به یک باشد.

در ادامه مسائلی را آورده‌ایم که می‌توان آن‌ها را با همین روش حل کرد.

۱. فرض می‌کنیم a، b، c و d اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید تمام اعداد $a-b^2$ ، $b-c^2$ ، $c-d^2$ و $d-a^2$ نمی‌توانند بزرگ‌تر از $\frac{1}{4}$ باشند.

۲. جمع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$$x+y=\sqrt{4z-1}$$

$$y+z=\sqrt{4x-1}$$

$$z+x=\sqrt{4y-1}$$

۳. فرض می‌کنیم، x و y اعدادی در بازه‌ی $(0,1)$ با این ویژگی باشند که عدد مثبت aای متفاوت از آن چنان موجود باشد که:

$$\log_x a+\log_y a=4\log_{xy} a$$

ثابت کنید: $x=y$.

۴. جمیع سه‌تایی‌های حقیقی (x,y,z) را بیابید که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$x^4+y^4+z^4-4xyz=-1$$

۵. جمیع سه‌تایی‌های اعداد حقیقی x، y و z صادق در:

$$2xy-z^2\ge 1$$

$$z-|x+y|\ge -1$$

را بیابید.

۶. فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و چنان باشند که:

$$a^2+c^2\le 4b$$

ثابت کنید به ازای هر $x\in R$:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1\ge 0$$

۷. ثابت کنید به ازای جمیع اعداد حقیقی x، y و z، نابرابری زیر برقرار است:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\ge\frac{3}{4}(x-y)^2$$

۸. اعداد حقیقی x_1 ، x_2 ، ... ، x_n صادق در رابطه‌ی زیر را بیابید.

$$\sqrt{x_1-1^2}+2\sqrt{x_2-2^2}+\cdots+n\sqrt{x_n-n^2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

۹. الف) فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی باشند. ثابت کنید:

$$ab+bc+ca\ge\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

ب) فرض می‌کنیم a، b و c اعدادی حقیقی و نامنفی چنان باشند که: $a+b+c=1$. ثابت کنید:

$$a^2+b^2+c^2+\sqrt{12abc}\le 1$$

۱۰. $f:N\to R$ را چنان معین کنید که به ازای هر k، m و n:

$$f(km)+f(kn)-f(k)f(mn)\ge 1$$

۱۱. فرض می‌کنیم a، b و c طول‌های یال‌های یک متوازی‌السطوح قائم و d طول قطر آن باشد. ثابت کنید:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abcd\sqrt{3}$$

۱۲. ثابت کنید در مثلث ABC نابرابری زیر برقرار است:

$$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$$

۱۳. اگر a_1 ، a_2 ، ... ، a_n اعدادی حقیقی باشند، نشان دهید:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\cos(a_i-a_j)\ge 0$$

حل مسائل

۱. اگر نابرابری‌های

$$d-a^2>\frac{1}{4} \text{ و } c-d^2>\frac{1}{4} \text{ و } b-c^2>\frac{1}{4} \text{ و } a-b^2>\frac{1}{4}$$

به‌طور هم‌زمان برقرار باشند، با جمع کردن آن‌ها نابرابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$a+b+c+d-(a^2+b^2+c^2+d^2)>1$$

با بردن جمیع مقادیر به سمت راست و تکمیل مربع‌ها داریم:

$$(\frac{1}{2}-a)^2+(\frac{1}{2}-b)^2+(\frac{1}{2}-c)^2+(\frac{1}{2}-d)^2<0$$

که تناقض است.

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۲. مانند مسئله‌ی قبل، سه نابرابری را جمع می‌کنیم و عبارت را به‌صورت مجموع مربعات بازنویسی می‌کنیم. با جمع و بردن جمیع مقادیر به سمت چپ، به دست می‌آوریم:

$$2x+2y+2z+\sqrt{4x-1}+\sqrt{4y-1}+\sqrt{4z-1}=0$$

می‌خواهیم این عبارت را به صورت مجموع سه مربع، یکی تنها وابسته به x، یکی تنها وابسته به y، و یکی تنها وابسته به z، بنویسیم. طرفین آن را بر ۲ تقسیم و به $x+\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ توجه می‌کنیم. حضور $\frac{1}{4}$ زیر ریشه‌ی دوم، جمع و تفریق $\frac{1}{4}$ را مطرح می‌کند. در این صورت داریم:

$$x-\frac{1}{4}+\sqrt{x-\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2$$

با بازگشت به مسئله‌ی اصلی داریم:

$$\left(\sqrt{x-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{y-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{z-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

بنابراین، هریک از این مربعات باید برابر ۰ باشد و نتیجه می‌گیریم:

$$x=y=z=\frac{1}{2}$$

تنها جواب دستگاه مفروض است.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu)

۳. از آن‌جا که $a>0$ و $a\neq 1$، نابرابری را می‌توان به صورت:

$$\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_a y}=\frac{4}{\log_a xy}$$

بازنویسی کرد که هم‌ارز:

$$\frac{\log_a x+\log_a y}{\log_a x\log_a y}=\frac{4}{\log_a x+\log_a y}$$

است. با حذف مخرج‌ها به دست می‌آوریم:

$$(\log_a x+\log_a y)^2=4\log_a x\log_a y$$

که مستلزم:

$$(\log_a x-\log_a y)^2=0$$

است. پس رابطه، تنها اگر $x=y$، می‌تواند برقرار باشد.

(مسابقه‌ی ریاضی رومانی، طرح از T. Andreescu)

۴. اگر بکوشیم، مربع شامل دو جمله‌ی اول سمت چپ را کامل کنیم، عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$(x^2-y^2)^2+2x^2y^2+z^4-4xyz$$

حضور $2x^2y^2$ و $-4xyz$، امکان افزودن $2z^2$ و سپس تکمیل مربعی دیگر را مطرح می‌کند. در این مرحله، ملاحظه‌ی این مطلب مشکل نیست که معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x^2-y^2)^2+(z^2-1)^2+2(xy-z)^2=0$$

این معادله تنها اگر جمع سه مربع برابر صفر باشند، می‌تواند برقرار باشد. از:

$$z^2-1=0$$

داریم: $z=\pm 1$. پس از تحلیلی سریع نتیجه می‌گیریم که جواب‌ها عبارت‌اند از:

$(1,1,1)$ و $(-1,1,-1)$ و $(1,-1,-1)$

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۵. از نابرابری دوم به دست می‌آوریم:

$$z\geq |x+y|-1$$

از استفاده از آن در نابرابری اول حاصل می‌شود:

$$2xy-(1-|x+y|)^2\geq 1$$

به ازای انتخابی از علامت‌های بعلاوه و منها داریم:

$$2xy-(1+|x+y|)^2=2xy-|x+y|^2+2|x+y|-1$$
$$=2xy-x^2-y^2-2xy+2(\pm x\pm y)-1$$
$$=-x^2-y^2+2(\pm x\pm y)-1$$

از نابرابری تحویل‌یافته‌ی فوق نتیجه می‌گیریم:

$$0\geq x^2+y^2-2(\pm x\pm y)+1+1=(1\pm x)^2+(1\pm y)^2$$

هر دو مربع حاصل باید برابر صفر باشند. درنتیجه، x و y، می‌توانند تنها مقادیر ۱ یا ۱− را داشته باشند. گذشته از این، در فوق ملاحظه می‌کنیم که xy مثبت است، بنابراین باید x و y علامت یکسان داشته باشند. به ازای $x=y=1$ یا $x=y=-1$ دو مورد:

$z-2\geq -1$ و $2-z^2\geq 1$

را به دست می‌آوریم و درنتیجه: $z\geq 1$ و $z^2\leq 1$.

تنها z صادق در دو نابرابری، $z=1$ است. درنتیجه، برای مسئله‌ی ما دو جواب:

$$x=y=z=1$$

و:

$x=y=-1$ و $z=1$

موجود است.

(T. Andreescu)

۶. با تکمیل مربع‌ها به دست می‌آوریم:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+1$$
$$=\left(x^2+\frac{a}{2}x\right)^2+\left(b-\frac{a^2+c^2}{4}\right)x^2+(x+1)^2$$

در این صورت، نابرابری از این مطلب نتیجه می‌شود که:

$$b\geq (a^2+c^2)/4$$

(Revista Matematică din Timisoara (Timisoara Mathematics Reviews), proposed by T. Andreescu)

۷. نابرابری مطلوب، هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(z-x)^2\right]\geq \frac{3}{4}(x-y)^2$$

یا:

$$3\left[(x-z)^2+(z-x)^2\right]\geq (x-y)^2$$

این نابرابری، با قرار دادن $a=y-z$ و $b=z-x$ به‌صورت:

$$2(a^2+b^2)\geq (a+b)^2$$

درمی‌آید، که به $(a-b)^2\geq 0$ تحویل می‌شود.

۸. سعی می‌کنیم، معادله را به مجموع دو مربع برابر با صفر تبدیل کنیم. به این منظور، برابری را در ۲ ضرب می‌کنیم، مقادیر

را به سمت راست می‌بریم و مربع‌ها را کامل می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$(x_1+x_2+\dots+x_n)-2\sqrt{x_1-1}-4\sqrt{x_2-2^2}-\dots-2n\sqrt{x_n-n^2}$$
$$=(x_1-1-2\sqrt{x_1-1}+1)+(x_2-2^2-4\sqrt{x_2-2^2}+2^2)+\dots$$
$$+(x_n-n^2-2n\sqrt{x_n-n^2}+n^2)=(\sqrt{x_1-1}-1)^2$$
$$+(\sqrt{x_2-2^2}-2)+\dots+(\sqrt{x_n-n^2}-n)^2$$

مجموع این مربع‌ها، بنا به فرض، باید برابر ۰ باشد. درنتیجه جمیع مربع‌ها برابر ۰ هستند. به این ترتیب:

$$\sqrt{x_1-1}=1,\ \sqrt{x_2-2^2}=2,\dots,\ \sqrt{x_n-n^2}=n$$

پاسخ منحصر به فرد معادله عبارت است از:

$$x_1=2,\ x_2=8,\ \dots,\ x_n=2n^2$$

(Gazeta Matematică (Mathematics Gazette, Bucharest), proposed by T. Andreescu)

۹. الف) با مربع کردن دو طرف به دست می‌آوریم:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\ge 3abc(a+b+c)$$

که هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\frac{1}{2}\left[(ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\right]\ge 0$$

ب) نابرابری هم‌ارز با نابرابری زیر است:

$$\sqrt{12abc}\le(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

که با نابرابری زیر همسان است:

$$\sqrt{12(a+b+c)abc}\le 2(ab+bc+ca)$$

و به نابرابری پیشین تحویل می‌شود.

(قسمت ب در المپیاد ریاضی اتریش ۱۹۸۴ آمده است.)

۱۰. هم‌چون مثال مقدمه، مقادیر خاصی برای n، m و k در معادله‌ی مفروض وارد می‌کنیم. با فرض:

$$m=n=k=0$$

نابرابری:

$$2f(0)-f^2(0)\ge 1$$

را به دست می‌آوریم. درنتیجه:

$$0\ge(f(0)-1)^2$$

که مستلزم $f(0)=1$ است. به ازای:

$$m=n=k=1$$

همین استدلال نشان می‌دهد که: $f(1)=1$. به ازای:

$$m=n=0$$

نابرابری زیر را به دست می‌آوریم:

$$2-f(k)\ge 1$$

درنتیجه، به ازای هر k، $f(k)\le 1$. و نیز، به‌ازای $k=1$ و $m=0$ نابرابری:

$$1+f(n)-1\ge 1$$

را به دست می‌آوریم که مستلزم $f(n)\ge 1$، به ازای جمیع مقادیر n است. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر n: $f(n)=1$.

(D. M. Bătinetu)

۱۱. از آن‌جا که در متوازی‌السطوح قائم، قطر توسط فرمول:

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

مشخص می‌شود، نابرابری مورد بحث با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2\ge 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$$

این نابرابری، پس از تجدید دسته‌بندی جملات، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{c^4}{2}(a^2-b^2)^2+\frac{a^4}{2}(b^2-c^2)^2+\frac{b^4}{2}(c^2-a^2)^2\ge 0$$

توجه داشته باشید که برابری، اگر و تنها اگر $a=b=c$، برقرار است؛ یعنی اگر متوازی‌السطوح مورد بحث مکعب باشد.

(Pîrsan, L., Lazanu, C. G., Probleme de algebră si trigonometrie (Problems in algebra and trigonometry), Facla, Timisoara, 1983)

۱۲. باید نشان دهیم که:

$$1-8\cos A\cos B\cos C\ge 0$$

سمت چپ را با استفاده از اتحادهای مثلثاتی به مجموع مربع‌ها تبدیل می‌کنیم. فرمول ضرب به جمع حاصل ضرب کسینوس‌ها می‌دهد:

$$1-8\cos A\cos B\cos C=1-4\cos A(\cos(B-C)$$
$$+\cos(B+C))$$

توجه داشته باشید:

$$\cos(B+C)=\cos(\pi-B-C)=-\cos A$$
$$\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$$

و:

$$\sin^2(B-C)+\cos^2(B-C)=1$$

عبارت فوق برابر است با:

$$\sin^2(B-C)+\cos^2(B-C)-4\cos A\cos(B-C)$$
$$+4\cos^2A=(\sin(B-C))^2+(\cos(B-C)-2\cos A)^2$$

و مورد اخیر، به‌طور واضح نامنفی است.

۱۳. با استفاده از فرمول جمع کسینوس به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij\cos(a_i-a_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(ij\cos a_i\cos a_j+ij\sin a_i\sin a_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}i\cos a_i\sum_{j=1}^{n}j\cos a_j+\sum_{i=1}^{n}i\sin a_i\sum_{j=1}^{n}j\sin a_j$$
$$=(\sum_{i=1}^{n}i\cos a_i)^2+(\sum_{i=1}^{n}i\sin a_i)^2\ge 0$$

1. Andreescu