اشاره

یکی از شاخه‌های ریاضیات کاربردی در سطح عالی، گرایش منطق فازی است. از آن‌جا که در دو دهه‌ی اخیر کاربرد فراوانی از این رشته را در صنعت داشته‌ایم و با توجه به این‌که مؤلف محترم مقاله، چند سالی است که در این زمینه تحقیق می‌کنند، به پیشنهاد دست‌اندرکاران مجله، ایشان به نگارش مجموعه مقالاتی در این زمینه پرداخته‌اند. ان‌شاءا... مورد استفاده خوانندگان مجله قرار گیرد.

● **دکتر محمدعلی فریبوزی عراقی**
عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی

مقدمه‌ای بر نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

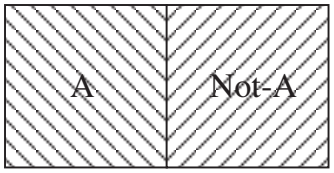
قسمت اول

تا قبل از پیدایش منطق فازی در سال ۱۹۶۵، قوانین حاکم بر علومی چون ریاضیات، بر پایه‌ی منطق دوارزشی یا منطق ارسطویی استوار بود. **ارسطو** معتقد بود، هر شیء، یا هست یا نیست و تفکری سیاه و سفید داشت. در حدود دو قرن قبل از او، **بودا** در هندوستان بیان داشت که جهان سراسر تناقض است و لذا در جهان مفهومی به صورت هم A و هم نه A را داریم. درواقع تفکر خاکستری (نه فقط سیاه و سفید)، مدت‌ها قبل از ارسطو وجود داشت.

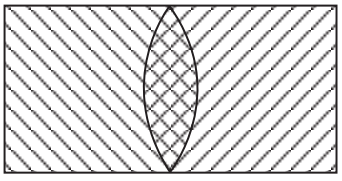
آلبرت اینشتین نیز دیدگاهی شبیه بودا داشت. به‌عقیده‌ی وی، جهان خاکستری است، ولی علم سیاه و سفید است و حقیقت چیزی بین صفر و یک است. به عبارت دیگر، حقایق چندارزشی هستند،

نه دوارزشی . جهانی که ما در آن زندگی می کنیم، فازی است، ولی ما توصیفی غیرفازی از آن داریم . اینشتین می گفت، جایی که قوانین ریاضیات به واقعیات مربوط می شوند، مطمئن نیستند و آن جا که مطمئن هستند، نمی توانند به واقعیت اشاره داشته باشند .

به این ترتیب ما با دو منطق مواجه هستیم : یکی منطق دوارزشی یا «قطعی»[1] که همان منطق ارسطویی است و بیان می دارد که هر چیزی یا هست یا نیست، چه در حال و چه در آینده، و دیگری منطق چندارزشی یا «فازی»[2] به معنای مبهم یا نامطمئن که بیان می دارد، هر چیزی دارای درجه ای از ابهام است . **برتراندراسل** نیز معتقد بود، همه چیز شامل این قاعده ی ثابت که آن چیز درست یا غلط است نمی شود و نباید برای روشن شدن این موضوع سعی کنیم . **ماکس بلک**[3] نیز به این اصل اعتقاد داشت که هر چیزی تا حدودی A و تا حدودی Not-A است .



منطق دو ارزشی (قطعی)



منطق چندارزشی (فازی)

«نظریه ی مجموعه های فازی» در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور **لطفی عسگرزاده** در آمریکا ارائه شد . وی با چاپ اولین مقاله ی خود در مجله ی «اطلاعات و کنترل»، دنیای علم را وارد این مقوله کرد که چگونه می توان تفکر دوارزشی را به چندارزشی تعمیم داد . ایشان در سال ۱۹۲۱ در شهر باکو متولد شد و تحصیلات دوره ی کارشناسی خود را در رشته ی مهندسی برق در سال ۱۹۴۲ در دانشگاه تهران به پایان رساند . سپس برای ادامه ی تحصیل به آمریکا رفت و در سال ۱۹۴۶، کارشناسی ارشد مهندسی برق را از دانشگاه MIT و در سال ۱۹۵۱، دکترای مهندسی برق را از دانشگاه کلمبیا اخذ کرد . وی در سال ۱۹۶۳، ریاست گروه مهندس برق دانشگاه UC برکلی کالیفرنیا را برعهده گرفت .

دیدگاه های این دانشمند ایرانی الاصل درخصوص منطقی که بنیان گذار آن بود، چنین است که برای توصیف ابهام از اعداد بین صفر و یک استفاده می کنیم . اصولاً تفکر و استدلال انسان فازی است، لذا باید ماشین هایی را ساخت که به قدرت استدلال انسان نزدیک تر باشند . حالت دوارزشی، ساده ولی کم دقت است و افزایش دقت به معنای افزایش فازی است . منطق فازی موجب هوشمندی ماشین ها می شود .

مخالفان نظریه ی عسگرزاده ، در بدو ارائه ی نظریه ی وی اعلام کردند که این نظریه کاربردی ندارد و هیچ ماشینی با منطق فازی کار نمی کند . آن ها حذف منطق دوارزشی را ناممکن و علم دوارزشی را حقیقت و علم فازی را غیرعلم می دانستند .

درحالی که واقعیت خاکستری است . مفاهیمی چون درست کاری، جوانی، خوش حالی، خوش بختی، سلامتی و... برای هر شخصی متفاوت است و نمی توان تنها با دو حالت ۰ و ۱ آن ها را توصیف کرد . حتی زندگی و مرگ هم مفاهیمی فازی دارند و باید به آن ها درجه داد . برای مثال، بیمارستانی را در نظر بگیرید که در آن شش مریض با امراض به ترتیب ناراحتی دستگاه گوارش، شکستگی استخوان پا، مسمومیت غذایی، عفونت ریه، سکته ی قلبی و مرگ مغزی در آن جا بستری هستند . اگر مفهوم زندگی را برای این افراد در نظر بگیریم، واضح است که زندگی آن ها توأم با نوعی ابهام و عدم اطمینان است و می توانیم درجات متفاوتی را برای آن منظور کنیم . یعنی بسته به آن که شدت مریضی چه قدر باشد، می توانیم مقادیر بین ۰ و ۱ را به زندگی آن فرد نسبت دهیم . به این ترتیب، نمونه ای از توصیف زندگی کردن برای این مجموعه از افراد به صورت زیر است :

$$\{(۱,۰/۸),(۲,۰/۷),(۳,۰/۷),(۴,۰/۶),(۵,۰/۳),(۶,۰/۱)\}$$

که در آن، مؤلفه ی اول شماره ی مریض و مؤلفه ی دوم درجه ای است که به زندگی کردن وی نظیر کرده ایم . هرقدر نوع مریضی خطر بیشتری داشته است، درجه ی زندگی فرد را ضعیف تر منظور کرده ایم . البته این درجات بسته به نظر افراد گوناگون می تواند متفاوت باشد . به عنوان مثالی دیگر، لامپی را در نظر بگیرید که سوسو می کند . اگر مفهوم سالم بودن مورد نظر باشد، نمی توان گفت این لامپ صددرصد سالم یا صددرصد خراب است و باید درجه ای به سالم بودن لامپ داد و مثلاً گفت : این لامپ با درجه ی ۰/۴ سالم است .

برخلاف نظر مخالفان منطق فازی که معتقد بودند، برای این منطق کاربردی وجود ندارد، کمتر از ده سال پس از ارائه ی این منطق توسط عسگرزاده در سال ۱۹۷۴ ، برای اولین بار منطق فازی در زمینه ی کنترل یک موتور بخار ساده در انگلستان توسط **ابراهیم محمدانی** به کار گرفته شد . پس از آن در دهه ی ۱۹۸۰ ، منطق فازی در کنترل اتوماتیک قطارهای زیرزمینی (مترو)، کنترل فرایند تصفیه ی آب و غیره به کار رفت . در سال ۱۹۸۴ ، «انجمن بین المللی سیستم های فازی» تأسیس شد . هم چنین، **سوگنو**[5] در ژاپن در سال ۱۹۷۲ از نظریات عسگرزاده برای ارائه ی مفاهیم اندازه و انتگرال فازی استفاده کرد . در سال ۱۹۹۰ ، منطق فازی در ساخت محصولات الکتریکی خانگی و برخی محصولات دیگر مورد بهره برداری قرار گرفت؛ از جمله در : ماشین لباس شویی، دوربین های عکاسی و فیلم برداری، مایکروویو، تلویزیون، بالگرد، تهویه ی مطبوع و قطار فازی .

در نظریه ی مجموعه های کلاسیک، یک مجموعه با یک ویژگی

کاملاً معین و قطعی مشخص می‌شود، لذا یک شیء، یا عضو یک مجموعه هست یا نیست. برای یک مجموعه‌ی قطعی چون A، تابع مشخصه‌ای به نام χ_A به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

به این ترتیب، یک مجموعه‌ی قطعی با تابع مشخصه‌ی خود شناسایی می‌شود. در این حالت χ_A تابعی از X به $\{0,1\}$ است. حال به تعریف یک مجموعه‌ی فازی می‌پردازیم:

تعریف: گیریم X مجموعه‌ی مرجع باشد. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{A}=\left\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))|x\in X\right\}$$

که در آن، $\mu_{\tilde{A}}:X\to[0,1]$ تابع عضویت مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نام دارد. در این حالت، عدد $0\le\mu_{\tilde{A}}(x)\le 1$ درجه‌ی عضویت x در $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. یک مجموعه‌ی فازی، منحصراً با تابع عضویت خودش مشخص می‌شود.

نمونه‌هایی از مجموعه‌های فازی عبارت‌اند از: اعداد تقریباً صفر، اعداد تقریباً بین ۲ و ۵، اعداد نزدیک ۱، اعداد خیلی کوچک، مردان بلند قد، اعداد خیلی بزرگ‌تر از ۱۰، اعداد بزرگ و... در هریک از این مجموعه‌ها، ابهام درخصوص معلوم نبودن عضویت یا عدم عضویت یک شیء در مجموعه وجود دارد. می‌توان گفت، مجموعه‌ی فازی حاصل توسعه‌ی مجموعه‌ی معمولی یا قطعی است؛ همان‌طوری که منطق فازی حاصل توسعه‌ی منطق چندارزشی است. برای مثال، مجموعه‌ی فازی کوچک بودن را روی مجموعه‌ی مرجع $X=\{1,2,3,4,5\}$ در نظر می‌گیریم. تابع عضویت این مجموعه‌ی فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0/6 & x=2\\ 0/3 & x=3\\ 0/1 & x=4\\ 0 & x=5\end{cases}$$

لذا $\tilde{A}$ به این صورت قابل بیان است:

$$\tilde{A}=\{(1,1),(2,0/6),(3,0/3),(4,0/1),(5,0)\}$$

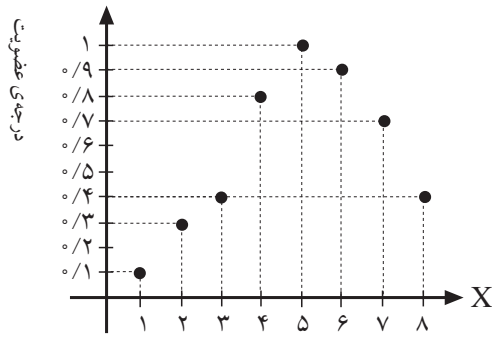
$\tilde{A}$ را به صورت زیر می‌نویسند:

$$\tilde{A}=\left\{\frac{1}{1},\frac{0/6}{2},\frac{0/3}{3},\frac{0/1}{4},\frac{0}{5}\right\}$$

در این روش نمایش، علامت ـــــ فقط یک نماد است و به معنای تقسیم نیست. در بالای این نماد مقدار درجه‌ی عضویت و زیر آن نام عضو مربوطه قرار می‌گیرد. هرقدر عدد کوچک‌تر باشد، درجه‌ی عضویت متناظر آن را بزرگ‌تر و هرقدر عدد بزرگ‌تر باشد، این درجه را کوچک‌تر در نظر می‌گیریم. به‌عنوان مثالی دیگر، مجموعه‌ی فازی تقریباً پنج را در نظر می‌گیریم. اگر $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ باشد، مجموعه‌ی $\tilde{B}$ در زیر توصیفی از این مجموعه‌ی فازی است:

$$\tilde{B}=\{(1,0/1),(2,0/3),(3,0/4),(4,0/8),(5,1),(6,0/9),(7,0/7),(8,0/4)\}$$

نمودار زیر نیز این مجموعه را به نمایش درمی‌آورد:



مثلاً می‌گوییم ۴ با درجه‌ی عضویت ۰/۸ عضو $\tilde{B}$ است. در این حالت، هرقدر از ۵ دور می‌شویم، میزان عضویت عدد در این مجموعه کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است، مقادیر درجه‌ی عضویت کاملاً سلیقه‌ای هستند و بسته به نظر افراد، می‌توانند مقادیر دیگری نیز باشند.

نظریه‌ی منطق فازی تاکنون گسترش زیادی یافته و با وجود آن‌که حدود چهار دهه از قدمت آن می‌گذرد، هم‌چنان در زمینه‌های گوناگون علمی مورد استفاده قرار می‌گیرد. نظریه‌ی مجموعه‌های فازی قادر است، بسیاری از مفاهیم مبهم را به‌صورت ریاضی مورد تحلیل قرار دهد و زمینه را برای استدلال و تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت فراهم آورد. در قسمت بعدی خوانندگان محترم را با اطلاعات بیشتری درخصوص منطق و مجموعه‌های فازی آشنا خواهیم کرد.

1. Crisp
2. Fuzzy
3. Black
4. Degrees-Grades
5. Sugeno

۱. تفکر فازی. بارت کاسکو. ترجمه‌ی دکتر علی غفاری و همکاران. دانشگاه خواجه نصیر طوسی. ۱۳۷۷.

۲. آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی. دکتر سیدمحمد طاهری. جهاد دانشگاهی. ۱۳۷۵.

۳. مقدمه‌ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی آن. کازوتاناکا. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان کامیاد و دکتر حامد رضا طارقیان. دانشگاه فردوسی. مشهد. ۱۳۸۱.