

تجزیه

● احمد قندهاری

تجزیه‌ی یک عبارت جبری، یعنی تبدیل آن عبارت به حاصل ضرب چند عامل نسبت به هم اول. این عمل به کمک فاکتورگیری و اتحادها صورت می‌گیرد. به مثال‌های زیر توجه فرمایید.

مثال ۱. عبارت $A = x^4 - 81y^4$ را تجزیه کنید.

حل: بنابر اتحاد مزدوج می‌توان نوشت:

$$A = x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$$

$$A = (x^2 - 9y^2)(x^2 + 9y^2) \Rightarrow A = (x - 3y)(x + 3y)(x^2 + 9y^2)$$

اتحاد مزدوج

مثال ۲. عبارت $A = y^2 - x^2 - 4(y - 1)$ را تجزیه کنید.

$$A = y^2 - x^2 - 4y + 4 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 - x^2$$

حل:

$$A = (y - 2)^2 - x^2 = (y - 2 - x)(y - 2 + x)$$

اتحاد مزدوج

مثال ۳. عبارت $A = m^4 + 4$ را تجزیه کنید.

حل: در اتحادها داریم: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$. پس:

$$A = (m^2)^2 + (2)^2 = (m^2 + 2)^2 - 4m^2$$

$$A = (m^2 + 2 - 2m)(m^2 + 2 + 2m)$$

با استفاده از اتحاد مزدوج

مثال ۴. عبارت $A = y^2 + 7y + 10$ را تجزیه کنید.

حل:

با استفاده از اتحاد $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

برای تجزیه‌ی عبارت A ، دو عدد هم علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۷ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۰ باشد. به سادگی می‌توان گفت که این دو عدد ۳ و ۴ هستند.

$$A = y^2 + 7y + 10 = (y + 3)(y + 4)$$

مثال ۵. عبارت $A = 2x^2 + 11x + 12$ را تجزیه کنید.

حل:

$$2A = 4x^2 + 11(2x) + 24 = (2x)^2 + 11(2x) + 24$$

فرض می‌شود: $2x = y$. پس داریم:

$$2A = y^2 + 11y + 24$$

حال بنابر اتحاد مثال (۴)، دو عدد هم علامت می‌یابیم که مجموع

آن‌ها ۱۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۴ باشد. به سادگی می‌توان دریافت که این دو عدد ۳ و ۸ هستند. پس:

$$2A = y^2 + 11y + 24 = (y + 8)(y + 3), \quad y = 2x$$

$$2A = (2x + 8)(2x + 3) \Rightarrow 2A = 2(x + 4)(2x + 3)$$

$$\Rightarrow A = (x + 4)(2x + 3)$$

مثال ۶. عبارت $A = 6x^2 + 13x - 5$ را تجزیه کنید.

$$6A = 36x^2 + 13(6x) - 30$$

حل:

$$6A = (6x)^2 + 13(6x) - 30$$

فرض می‌شود: $6x = y$. پس داریم:

$$6A = y^2 + 13y - 30$$

حال دو عدد مختلف علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۱۳ و

حاصل ضرب آن‌ها -30 باشد. این دو عدد ۱۵ و -2 هستند. پس:

$$6A = y^2 + 13y - 30 = (y + 15)(y - 2), \quad y = 6x$$

$$6A = (6x + 15)(6x - 2) = 3(2x + 5)(2)(3x - 1)$$

$$6A = 6(2x + 5)(3x - 1) \Rightarrow A = (2x + 5)(3x - 1)$$

مثال ۷. عبارت $A = n^4 + 4n^2 - 32$ را تجزیه کنید.

$$A = n^4 + 4n^2 - 32$$

حل:

فرض می‌شود: $n^2 = y$. پس داریم:

$$A = y^2 + 4y - 32$$

حال دو عدد مختلف علامت می‌یابیم که مجموع آن‌ها ۴ و

حاصل ضرب آن‌ها -32 باشد. این دو عدد ۸ و -4 هستند. پس:

$$A = y^2 + 4y - 32 = (y - 4)(y + 8), \quad n^2 = y$$

$$A = (n^2 - 4)(n^2 + 8) \Rightarrow A = (n - 2)(n + 2)(n^2 + 8)$$

مثال ۸. عبارت $A = x^4 - 13x^2 + 36$ را تجزیه کنید.

$$A = x^4 - 13x^2 + 36$$

حل:

فرض می شود: $x^2 = y$. پس داریم:

$$A = y^2 - 13y + 36$$

حال دو عدد هم علامت می یابیم که مجموع آن ها ۱۳- و حاصل ضرب آن ها ۳۶ باشد. این دو عدد ۴- و ۹- هستند. پس:

$$A = y^2 - 13y + 36 = (y - 9)(y - 4), \quad y = x^2$$

$$A = (x^2 - 9)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2)$$

مثال ۹. عبارت $A = x^6 - 9x^3 + 8$ را تجزیه کنید.

$$A = x^6 - 9x^3 + 8$$

حل:

فرض می شود: $x^3 = y$. پس داریم:

$$A = y^2 - 9y + 8$$

حال دو عدد مختلف علامت می یابیم که مجموع آن ها ۹- و حاصل ضرب آن ها ۸ باشد. این دو عدد ۱- و ۸- هستند. پس:

$$A = y^2 - 9y + 8 = (y - 1)(y - 8), \quad y = x^3$$

$$A = (x^3 - 1)(x^3 - 8)$$

بنابر اتحاد $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ می توان نوشت:

$$A = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

مثال ۱۰. عبارت $A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ را

تجزیه کنید.

حل: فرض می کنیم:

$$(c - a) = z, \quad (b - c) = y, \quad (a - b) = x$$

$$x + y + z = a - b + b - c + c - a = 0$$

دو طرف را به توان ۳ می رسانیم:

$$\Rightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$$

$$\Rightarrow (x + y)^3 = (-z)^3$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3, \quad x + y = -z$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(-z) = -z^3 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow A = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$$

مثال ۱۱. عبارت $A = (x^2 - 1)^2 - 11x^2 + 35$ را تجزیه کنید.

$$A = (x^2 - 1)^2 - 11(x^2 - 1) + 35$$

حل:

$(x^2 - 1) = y$ فرض می شود:

$$A = y^2 - 11(y + 1) + 35$$

$$\Rightarrow A = y^2 - 11y + 24$$

حال دو عدد مختلف علامت می یابیم که مجموع آن ها ۱۱- و حاصل ضرب آن ها ۲۴ باشد. این دو عدد ۳- و ۸- هستند. پس:

$$A = y^2 - 11y + 24 = (y - 3)(y - 8), \quad y = x^2 - 1$$

$$A = (x^2 - 1 - 3)(x^2 - 1 - 8) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

$$\Rightarrow A = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

مثال ۱۲. عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$A = (x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$$

حل:

$$A = \underbrace{(x + 1)(x + 7)}_{x^2 + 8x + 7} \underbrace{(x + 3)(x + 5)}_{x^2 + 8x + 15} + 15$$

(فرض می شود) $x^2 + 8 = y$ و

$$A = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15$$

$$A = (y + 7)(y + 15) + 15 \Rightarrow A = y^2 + 22y + 105 + 15$$

$$A = y^2 + 22y + 120$$

حال دو عدد هم علامت می یابیم که مجموع آن ها ۲۲ و حاصل ضرب آن ها ۱۲۰ باشد. این دو عدد ۱۰ و ۱۲ هستند.

$$A = (y + 12)(y + 10) = (x^2 + 8x + 20)(x^2 + 8x + 12)$$

$$A = y^2 + 22y + 120 = (y + 12)(y + 10) \text{ و } y = x^2 + 8x$$

$$A = (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 20)$$

$$A = (x^2 + 8x + 12)(x + 6)(x + 2)$$

مثال ۱۳. عبارت $A = x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$ را تجزیه کنید.

$$A = x \left[\underbrace{x^2(x^2 - 7)^2 - 36}_{\text{اتحاد مزدوج}} \right] \quad \text{حل:}$$

$$A = x \left[x(x^2 - 7) - 6 \right] \left[x(x^2 - 7) + 6 \right]$$

$$A = x \left[x^3 - 7x - 6 \right] \left[x^3 - 7x + 6 \right]$$

$$A = x \left[x^3 - x - 6x - 6 \right] \left[x^3 - x - 6x + 6 \right]$$

$$A = x \left[x(x^2 - 1) - 6(x + 1) \right] \left[x(x^2 - 1) - 6(x - 1) \right]$$

$$A = x \left[x(x - 1)(x + 1) - 6(x + 1) \right] \left[x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) \right]$$

$$A = x(x + 1) \left[x^2 - x - 6 \right] (x - 1) \left[x^2 + x - 6 \right]$$

$$A = x(x + 1)(x - 1) \left[(x - 3)(x + 2) \right] \left[(x + 3)(x - 2) \right]$$

$$A = x(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x + 2)(x + 3)(x - 2)$$

$$A = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4ab^2 + 4abc} \quad \text{مثال ۱۴. کسر}$$

را ساده کنید.

حل: در صورت کسر از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم:

$$A = \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2 - c^2 + a^2 - b^2 + c^2)}{4ab(b + c)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}, C = \sqrt{A^2 - B}}$$

فرمول تجزیه‌ی رادیکال‌ها

مثال ۱. عبارت $P = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}}$ را به رادیکال‌های ساده‌تر تبدیل کنید.

حل:

$$P = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = \sqrt{30 - \sqrt{12^2 \times 6}} = \sqrt{30 - \sqrt{864}}$$

$$\begin{cases} A = 30 \\ B = 864 \end{cases} \quad C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{900 - 864} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{30 - \sqrt{864}} &= \sqrt{\frac{30+6}{2}} - \sqrt{\frac{30-6}{2}} = \sqrt{18} - \sqrt{12} \\ &= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

پس: $P = \sqrt{30 - 12\sqrt{6}} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

مثال ۲. رادیکال $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$ را تجزیه کنید.

حل: ابتدا $\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ را تجزیه می‌کنیم. یعنی در واقع عبارت

اصلی را به صورت $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$ می‌نویسیم. سپس جواب‌ها را داخل رادیکال اولی قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{17 + \sqrt{144 \times 2}} = \sqrt{17 + \sqrt{288}}$$

$$\begin{cases} A = 17 \\ B = 288 \end{cases} \quad C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{289 - 288} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{17 + \sqrt{288}} = \sqrt{\frac{17+1}{2}} + \sqrt{\frac{17-1}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{8} = 3 + \sqrt{8}$$

$$\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 8 \end{cases}$$

$$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{9 - 8} = 1$$

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} + \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2b^2 - 2c^2)(2a^2)}{4ab(b+c)} = \frac{2(b^2 - c^2)(2a^2)}{4ab(b+c)} \\ &= \frac{2(b-c)(b+c)(2a^2)}{4ab(b+c)} \end{aligned}$$

$$A = \frac{2a^2(b-c)(b+c)}{4ab(b+c)}, b+c \neq 0, a \neq 0 \Rightarrow A = \frac{a(b-c)}{b}$$

مثال ۱۵. کسر $A = \frac{x^5 - ax^4 - a^4x + a^5}{x^4 - ax^3 - a^2x^2 + a^3x}$ را ساده کنید.

حل:

$$A = \frac{x^4(x-a) - a^4(x-a)}{x^3(x-a) - a^2x(x-a)} = \frac{(x-a)(x^4 - a^4)}{x(x-a)(x^2 - a^2)}$$

$$x \neq \pm a, A = \frac{x^4 - a^4}{x(x^2 - a^2)} = \frac{(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x(x^2 - a^2)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^2 + a^2}{x}$$

تجزیه‌ی رادیکال‌ها

تبدیل عبارت داخل یک رادیکال به عبارت ساده‌تر را تجزیه رادیکال‌ها گویند. فرض کنید می‌خواهیم عبارت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ را به عبارت‌های ساده‌تر تبدیل کنیم. فرض می‌کنیم این عبارت را به صورت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ درآوردیم.

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \quad \text{می‌توان نوشت:}$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy} \Rightarrow \begin{cases} A = x + y \\ \sqrt{B} = 2\sqrt{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = A \\ 4xy = B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = A = S \\ xy = \frac{B}{4} = P \end{cases}$$

حال معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل می‌دهیم که مجموع دو

ریشه‌ی آن A و حاصل ضرب دو ریشه‌ی آن $\frac{B}{4}$ باشد. از حل

معادله‌ی حاصل x و y به دست می‌آید.

$$Z^2 - SZ + P = 0 \Rightarrow Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0$$

$$Z = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

فرض می‌کنیم: $\sqrt{A^2 - B} = C$. داریم:

$$\Rightarrow Z = \frac{A \pm C}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{A+C}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{A-C}{2}$$