

هم شانس سازی فضاهاى نمونه‌ای، چرا قانون بیز؟

● حمیدرضا امیری

اگر بخواهیم از زاویه‌ای دیگر به این نوع مثال‌ها نگاه کنیم، شاید راحت‌تر و در مدت زمان کوتاه‌تری بتوانیم مسئله را به جواب برسانیم. در مثال قبل، وقتی شرط قرمز بودن مهره پذیرفته می‌شود، در واقع فضای نمونه‌ای محدود شده است. اگر فرض کنیم کل مهره‌های قرمز موجود به دو جعبه‌ی فضای نمونه‌ای محدود شده باشد، ملاحظه می‌کنیم که دو جعبه روی هم ۶ مهره‌ی قرمز دارند. پس احتمال آن که مهره‌ی مورد نظر از جعبه‌ی A_1 باشد، برابر است با تعداد قرمزهای A_1 به تعداد کل قرمزها؛ یعنی $\frac{4}{6}$ که با جواب مسئله

از طریق قانون بیز مطابقت دارد!

حال این سؤال پیش می‌آید که آیا این مطابقت اتفاقی است یا همیشه برقرار است؟ آیا حالت خاصی است و امکان دارد در مواردی نتوانیم از این روش استفاده کنیم؟ اصولاً یکی کردن و روی هم در نظر گرفتن مهره‌های قرمز، مبنای صحیح علمی (از نظر علم احتمال) دارد یا خیر؟ شاید حدس زده باشید که مسئله به تعداد کل مهره‌ها در هر یک از جعبه‌ها مربوط می‌شود. درست است. در این مثال، هر دو جعبه دارای ۷ مهره‌اند و در واقع، برای هر جعبه شانس برداشت هر مهره (به شرط این که شماره‌های ۱ تا ۷ روی آن‌ها حک شده باشد) برابر است با $\frac{1}{7}$. یعنی احتمال برداشت قرمز شماره‌ی یک از جعبه A_1 ، برابر با احتمال برداشت قرمز شماره‌ی یک از جعبه‌ی A_2 و برابر است با $\frac{1}{7}$. دقیقاً به همین دلیل، در محاسبه‌ی احتمال شرطی $P(A|B)$ می‌توان از رابطه‌ی $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ استفاده کرد.

این مسئله را در حالت کلی نیز می‌توان به شکل زیر به اثبات رساند:

فرض کنیم در جعبه‌ی A_1 ، m_1 مهره‌ی قرمز و n_1 مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی A_2 ، m_2 مهره‌ی قرمز و n_2 مهره‌ی آبی وجود دارد و $m_1 + n_1 = m_2 + n_2 = K$. حال اگر یکی از دو جعبه را به تصادف

گاهی اوقات محاسبه‌ی احتمال رخداد پیشامد A به شرط رخداد پیشامد B ، یعنی $P(A|B)$ ، به دلیل عدم ارتباط کافی بین A و B مشکل است، ولی با تعویض شرط و مشروط، یعنی عوض کردن جای دو پیشامد A و B مشاهده می‌شود، محاسبه‌ی $P(B|A)$ به سادگی صورت می‌پذیرد. «قانون بیز» با استفاده از همین نکته، مسائلی از این نوع را به راحتی به جواب می‌رساند. زیرا طبق قانون بیز داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A)$$

برای مثال فرض کنیم، در هر یک از جعبه‌های A_1 و A_2 ، به ترتیب ۴ مهره‌ی قرمز و ۳ مهره‌ی آبی، و ۲ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از دو جعبه به تصادف انتخاب و یک مهره از آن خارج شده است. مشاهده می‌شود که این مهره قرمز است. می‌خواهیم محاسبه کنیم احتمال آن‌را که این مهره از جعبه‌ی A_1 باشد. در واقع، با فرض این که مهره‌ی خارج شده قرمز است، احتمال آن که مهره از A_1 باشد، موردنظر است. آیا علم به این که مهره قرمز است، کمکی می‌کند که احتمال مهره از A_1 بودن را محاسبه کنیم؟ ولی اگر جای A و B عوض شود، یعنی احتمال قرمز بودن مهره را بخواهیم، به شرط آن که بدانیم مهره از A_1 است، محاسبه‌ی این احتمال کاری ساده خواهد بود. زیرا اگر بدانیم مهره از جعبه‌ی A_1 خارج شده، احتمال قرمز بودن آن $\frac{4}{7}$ است!

از طرف دیگر، محاسبه‌ی $P(A)$ و $P(B)$ نیز به تنهایی آسان است. قانون بیز مسئله را به این شکل حل می‌کند:

پیشامد آن که مهره از A_1 باشد A
پیشامد آن که مهره قرمز باشد B

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}} \times \frac{4}{7}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2} \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7} \right)} \times \frac{4}{7} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{4}{6}$$

انتخاب و مهره‌ای از آن خارج کنیم و ببینیم که قرمز است، چه قدر احتمال دارد این مهره متعلق به جعبه‌ی A_1 باشد؟

پیشامد آن که مهره از A_1 باشد $A =$
پیشامد آن که مهره قرمز باشد $B =$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{K} + \frac{m_2}{K} \right)} \times \frac{m_1}{K}$$

$$= \frac{\frac{m_1}{K}}{\frac{m_1 + m_2}{K}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\xrightarrow{m_1 + m_2} P(A|B) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{\text{تعداد قرمزهای جعبه‌ی } A_1}{\text{مجموع قرمزهای دو جعبه}}$$

حال مسئله را در حالتی بررسی می‌کنیم که تعداد کل مهره‌ها در هر یک از جعبه‌ها با هم برابر نباشند. به مسئله‌ی زیر دقت کنید:
در جعبه‌ی A_1 ، ۴ مهره قرمز و ۲ مهره‌ی آبی و در جعبه‌ی A_2 ، ۳ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. مهره قرمز است. چه قدر احتمال دارد این مهره از جعبه‌ی A_1 باشد؟

مهره از جعبه‌ی A_1 باشد $A =$
مهره قرمز باشد $B =$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \times P(B|A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{6} + \frac{3}{8} \right)} \times \frac{3}{8} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{25}{24}} = \frac{9}{25}$$

حال اگر بخواهیم، کل مهره‌های قرمز در دو جعبه را فضای نمونه‌ای محدود شده در نظر بگیریم و تعداد مهره‌های قرمز در جعبه‌ی A_1 را بر آن تقسیم کنیم، به عدد $\frac{3}{4+3}$ یا $\frac{3}{7}$ می‌رسیم که با عدد حاصل از استفاده از قانون بیز مطابقت ندارد!
فکر می‌کنید چه عاملی باعث شده است تا دو جواب با هم برابر نباشند؟ البته جوابی که با استفاده از قانون بیز به دست آورده‌ایم، یعنی $\frac{9}{25}$ ، همواره درست است.

با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که تفاوت این مسئله با مثال قبل در این است که در جعبه‌ی A_1 ، ۶ مهره و در A_2 ، ۸ مهره وجود دارد. بنابراین احتمال برداشت هر مهره از A_1 برابر است با $\frac{1}{6}$. در صورتی که در A_2 این احتمال $\frac{1}{8}$ است.

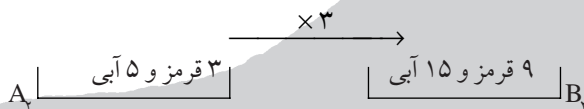
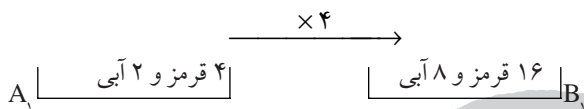
یعنی فضاهای نمونه‌ای در این دو جعبه هم‌شانس نیستند و بنابراین نمی‌توان در فضاهای غیر هم‌شانس، از رابطه‌ی

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

شما برسد که آیا می‌توان فضاهای را هم‌شانس کرد و از همان روش ساده برای محاسبه‌ی احتمال شرطی استفاده کرد؟

پاسخ به این سؤال مثبت است. ما این کار را انجام می‌دهیم و شما ملاحظه خواهید کرد که به روشی بسیار ساده، این عمل (هم‌شانس سازی فضاهای) انجام می‌پذیرد. برای هم‌شانس سازی فضاهای کافی است، کوچک‌ترین مضرب مشترک تعداد مهره‌ها در دو جعبه، یعنی ۶ و ۸ را به دست آوریم و مهره‌های هر جعبه را در عددی ضرب کنیم تا تعداد آن‌ها به ۶ م برسد. یعنی در همین مسئله‌ی قبل، چون $[6, 8] = 24$ ، باید مهره‌های جعبه‌ی A_1 را (هم مهره‌های قرمز و هم مهره‌های آبی) در $\frac{24}{6} = 4$ و

مهره‌های جعبه‌ی A_2 را در $\frac{24}{8} = 3$ ضرب کنیم. در این صورت دو جعبه‌ی جدید به صورت زیر خواهیم داشت که در هر کدام ۲۴ مهره وجود دارد و فضاهای آن‌ها هم‌شانس است.



حال یکی از دو جعبه‌ی B_1 و B_2 را به تصادف انتخاب و ۱ مهره از آن خارج و مشاهده می‌کنیم که قرمز است. چه قدر احتمال دارد از B_1 باشد؟

چون در هر جعبه ۲۴ مهره وجود دارد، لذا می‌توان فضای نمونه‌ای را، تعداد کل مهره‌های قرمز در دو جعبه‌ی B_1 و B_2 در نظر گرفت که تعدادشان ۲۵ است. تعداد مهره‌های قرمز در B_1 ، ۹ است که با تقسیم ۹ بر ۲۵، به همان عدد $\frac{9}{25}$ که با روش قاعده‌ی

بیز به دست آورده‌ایم، می‌رسیم!
شما به عنوان تمرین مسئله‌ی زیر را حل کنید (از روش هم‌شانس سازی):

در جعبه‌ی A_1 ، ۲ مهره قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۱ مهره‌ی سبز، در جعبه‌ی A_2 ، ۳ مهره قرمز، ۲ مهره‌ی آبی و ۳ مهره‌ی سبز، و در جعبه‌ی A_3 ، ۳ مهره قرمز، ۳ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی سبز وجود دارد. یکی از این سه جعبه را به تصادف انتخاب و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. مهره سبز است. چه قدر احتمال دارد این مهره از جعبه‌ی A_1 باشد؟

$$\frac{45}{48+45+20} = \frac{45}{113} \quad \text{جواب:}$$