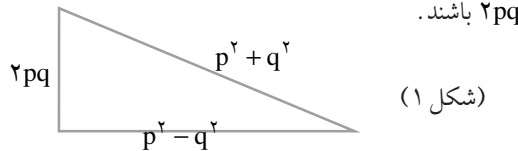


یک نامساوی ساده



(شکل ۱)

$$s = \frac{1}{2}[(p^2 + q^2) + (p^2 - q^2) + 2pq]$$

به دست می آید که پس از ساده شدن به این صورت درمی آید:

$$s = p(p + q) \quad (2)$$

هم چنین:

$$s - a = p^2 + pq - (p^2 + q^2) = q(p - q) \quad (3)$$

از ترکیب رابطه های (۲) و (۳) فرمول زیر نتیجه می شود:

$$s(s - a) = p(p + q) \times q(p - q) = pq(p^2 - q^2) \quad (4)$$

فرمول متداول برای به دست آوردن مساحت مثلث عبارت است از:

ارتفاع $\times$ قاعده $\div 2$ = مساحت

با استفاده از فرمول فوق و رابطه ی (۴) خواهیم داشت:

$$A = \frac{1}{2}(p^2 - q^2) \times 2pq = pq(p^2 - q^2) = s(s - a)$$

سپس متوجه شدیم، در صورتی که اضلاع اعداد صحیح باشند، نیازی به استفاده از اجزای سه گانه فیثاغورث نیست، بلکه تنها به قضیه ی فیثاغورث نیاز است. در حقیقت فرمول (۱) عملی است، اگر و تنها اگر مثلث قائم الزاویه باشد.

اگر فرمول (۱) برقرار باشد، می توان با استفاده از «فرمول هرون» برای به دست آوردن مساحت مثلثی با اضلاع a ، b و c چنین نوشت:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s(s-a) \quad \text{داریم:}$$

از به توان ۲ رساندن دو طرف و تقسیم آن بر $s(s-a)$ خواهیم داشت:

$$(s-b)(s-c) = s(s-a)$$

پس از ضرب و جابه جایی عوامل خواهیم داشت:

$$bc = s(b+c-a)$$

هرگاه $2s = a+b+c$ باشد، داریم:

$$2bc = (b+c+a)(b+c-a)$$

که به صورت زیر ساده می شود:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

با استفاده از عکس قضیه ی فیثاغورث، این مثلث قائم الزاویه است.

ثابت می کنیم وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، آن گاه $1 \rightarrow \frac{1}{n}$. این اثباتی ساده و نسبتاً جدید است. برای $x \geq 0$ و $0 < a < 1$ ، $f(x)$ را طوری تعریف کنید که $f'(x) = a - ax^{a-1}$ و $f''(x) = a(1-a)x^{a-2}$ باشد. ملاحظه می کنیم که $f(x)$ در $x=1$ مقدار می نیم خود را به دست می آورد. بنابراین داریم:

$$x^a \leq ax + (1-a) \quad (1)$$

هرگاه: $x = \sqrt[n]{n}$ و $a = \frac{1}{n}$ ، در صورتی که $n \rightarrow \infty$ خواهیم داشت:

$$(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

اما $1 < (\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{n}}$ ، هرگاه $n > 1$ باشد. بنابراین وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم:

$$(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

چون $(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ ، پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$$

برای مشاهده ی کاربردهای دیگر نامساوی (۱)، x را مساوی

$\frac{a}{b}$ قرار دهید و دو طرف نامساوی (۱) را در b ضرب کنید تا

نامساوی میانگین حسابی-هندسی برای دو متغیر به دست آید. اگر a و b و α و β مثبت باشند و $\alpha + \beta = 1$ باشد، آن گاه:

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b \quad (2)$$

و تساوی برقرار است، اگر و فقط اگر $a = b$ باشد.

فرض کنید که a_i و b_i اعداد مثبت ($1 \leq i \leq n$)، $\sum a_i = 1$ و $\sum b_i = 1$ باشد. اگر نامساوی (۲) را n مرتبه بنویسیم و آن ها را جمع

$$\sum a_i^\alpha b_i^\beta \leq \alpha \sum a_i + \beta \sum b_i = \alpha + \beta = 1$$

کنیم:

اگر x_i و y_i اعداد مثبت باشند، می توان نوشت:

$$a_i = \frac{x_i^\alpha}{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}, \quad b_i = \frac{y_i^\beta}{y_1^\beta + \dots + y_n^\beta}$$

$$\sum x_i y_i \leq (\sum x_i^\alpha)^\alpha + (\sum y_i^\beta)^\beta$$

و خواهیم داشت:

ALAN BEHRDON Department of Pure Mathematics, University of Cambridge.

یک خاصیت مساحت در مثلث قائم الزاویه

در بررسی خواص سه گانه ی فیثاغورث، فرمول زیر را برای سطح A از یک مثلث قائم الزاویه کشف کردم. هرگاه نصف محیط s و ارتفاع a داده شده باشد، داریم:

$$A = s(s-a) \quad (1)$$

هر یک از خواص سه گانه ی فیثاغورث را می توان به صورت

$$a = p^2 + q^2, \quad 2pq = p^2 - q^2$$

برابر است با ارتفاع یک مثلث قائم الزاویه، هرگاه اضلاع آن $p^2 - q^2$ و