



# یک مسئله چند راه حل

● مهدی منیری بیدگلی

دبیر ریاضی شهرستان چادگان

چندی پیش، یکی از دانش آموزان مسئله‌ای را مطرح کرد که با روش‌ها و ابزارهای متفاوت قابل حل است و لذا می‌توان آن را در پایه‌های گوناگون تحصیلی مطرح کرد. در مقاله‌ی حاضر، چند راه حل متفاوت برای این مسئله ارائه شده است. شما نیز بکوشید راه‌های دیگری برای حل آن بیابید.

مسئله: در شکل (۱)، مساحت قسمت هاشورخورده را بیابید.

مسئله‌ها قلب ریاضیات هستند و حل مسئله، قلب یادگیری ریاضی است. فایده‌ی حل یک مسئله از چند راه متفاوت چیست؟ می‌دانیم حل یک مسئله از چند راه متفاوت، نوعی مطالعه‌ی ریاضیات است و مطالعه‌ی ریاضیات، دستگاه ذهن را توسعه می‌دهد. پس حل یک مسئله با چند روش، ذهن را فعال می‌کند و باعث بروز ابتکار و خلاقیت می‌شود.

$$\frac{1}{2} GH \times FG$$

می دانیم  $FG = 1$  و  $FH = 2$ . پس از رابطه ی فیثاغورس داریم:  $GH = \sqrt{3}$

بنابراین مساحت مثلث  $FHG$  برابر است با  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

در این صورت مساحت  $\frac{1}{4}Z$  به دست می آید:  $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{1}$  و

از آن جا مساحت  $Z$  برابر است با  $2\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$

حال دستگاه مقابل را حل می کنیم:

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 8 \\ 2x + z = 2\pi \\ z = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

پس از حل دستگاه، مقادیر زیر برای  $x$  و  $y$  به دست می آیند:

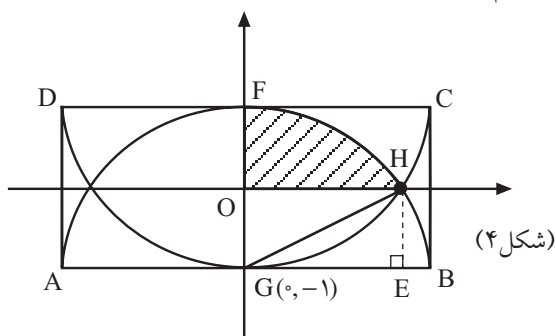
$$x = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad y = 4 - \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

پس، مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

## روش دوم

در این روش، مبدأ مختصات را منطبق بر مرکز مستطیل قرار می دهیم (شکل ۴).



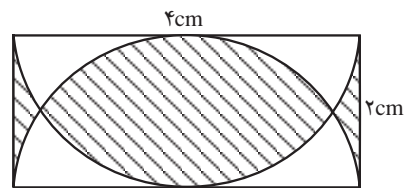
سطح محصور بین محورهای مختصات، با مساحت  $\frac{1}{4}Z$  برابر

است و به منظور محاسبه ی آن، طبق قضیه ی فیثاغورس داریم:

$$GE = \sqrt{GH^2 - EH^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a = x_H = \sqrt{3}$$

هم چنین معادله ی منحنی  $FH$  را می نویسیم. مرکز این دایره

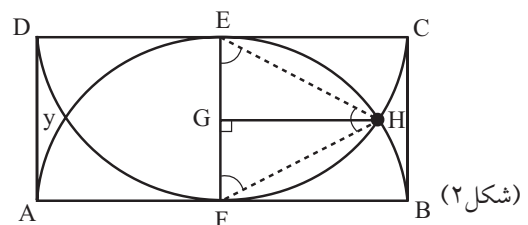
نقطه ی  $G(0, -1)$  و شعاع ۲ است. پس خواهیم داشت:



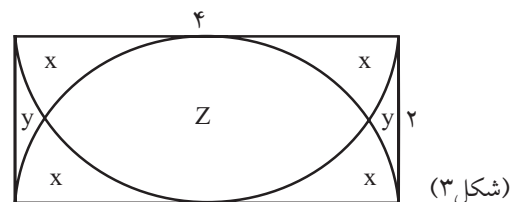
(شکل ۱)

## روش اول

با توجه به تقارن موجود در شکل ۱، مسئله را حل می کنیم. ابتدا قسمت های گوناگون شکل را نامگذاری می کنیم. بنابراین داریم:



در مورد کل مساحت شکل، رابطه ی  $4x + 2y + z = 8$  و در مورد نیم دایره ها، رابطه ی  $2x + z = 2\pi$  را می توان نوشت. حال از خواص قطاع دایره و مساحت آن استفاده می کنیم. قطاع  $EFH$  را از نیم دایره ی  $AEB$  در نظر می گیریم (شکل ۳).



(شکل ۳)

اگر مساحت مثلث قائم الزاویه ی  $GHF$  را از مساحت قطاع  $EFH$

کم کنیم، مساحت  $\frac{1}{4}Z$  به دست می آید که راهگشای حل مسئله است.

می دانیم مثلث  $EFH$  متساوی الاضلاع است (چرا؟). لذا اندازه ی هر زاویه ی آن  $60^\circ$  درجه است. چون مساحت قطاع مورد

نظر برابر با  $\frac{1}{2}R^2\theta$  است که در آن  $\theta$  بر حسب رادیان است، لذا

داریم:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

مساحت مثلث قائم الزاویه ی  $FHG$  برابر است با:

$F_1$  و  $E_1$  برابر  $30^\circ$  درجه هستند. پس مساحت قطاع های نام برده را می یابیم:

$$S_{FBH} = S_{EHC} = \frac{\pi}{3}$$

چون طبق قضیه ی فیثاغورس  $GH = \sqrt{3}$  است، مساحت مثلث متساوی الاضلاع EFH نیز برابر است با  $\sqrt{3}$ . بنابراین:

$$4 - y = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \Rightarrow y = 4 - \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

حال طبق شکل ۱ می توان نوشت:

$$y + x = 4 - \pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$$

و در نهایت مساحت Z به دست می آید که برابر است با:

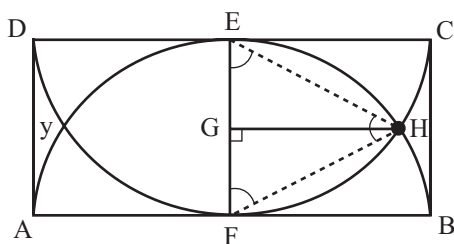
$$\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

با تمام این یافته ها، مساحت قسمت هاشورخورده در شکل ۱ به دست می آید:

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

#### روش چهارم

از تقارن موجود در شکل استفاده می کنیم و می دانیم مانند شکل ۶، مساحت قسمت Z تشکیل شده است از مساحت یک لوزی و مساحت چهار قطاع اطراف آن (شکل ۶). برای یافتن مساحت لوزی، ابتدا از مثلث قائم الزاویه ی EGH که مساحتش ربع مساحت لوزی است، داریم:



(شکل ۶)

چون EH شعاع دایره است، پس  $EH = 2$  و لذا از قضیه ی فیثاغورس به دست می آوریم:

$$GH^2 = EH^2 - EG^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow GH = \sqrt{3}$$

پس نصف قطر بزرگ لوزی به دست می آید. در این صورت

$$KH = 2GH = 2\sqrt{3} \quad (۱)$$

با استفاده از انتگرال داریم:

$$(x-0)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4-x^2} - 1$$

$$S_z = \int_a^b y dx = \int_a^b (-1 + \sqrt{4-x^2}) dx$$

$$= \int_a^b -1 dx + \int_a^b \sqrt{4-x^2} dx$$

$$= -4a + 4 \int_a^b \sqrt{4-x^2} dx \quad (۱)$$

با تغییر متغیر  $x = 2 \sin \theta$  انتگرال اخیر را محاسبه می کنیم:

$$\int_a^b \sqrt{4-x^2} dx = \int_a^b 2 \cos^2 \theta d\theta = 2 \int_a^b (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \left[ \frac{2\pi}{3} + \sin 2\theta \right]_a^b = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حال با جای گذاری در رابطه ی ۱ داریم:

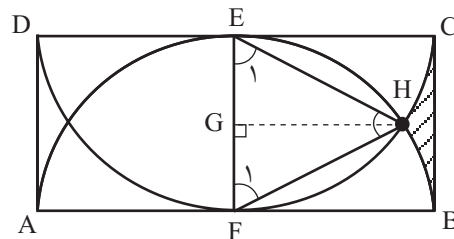
$$S_z = -4\sqrt{3} + 4 \left( \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

در ادامه، همانند روش اول، دستگاه معادلات را حل می کنیم

$$\text{و مقدار } 2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3} \text{ را می یابیم.}$$

#### روش سوم

از تقارن موجود در شکل استفاده می کنیم و می دانیم مجموع مساحت قطاع های EHC و FHB، به علاوه ی مساحت مثلث متساوی الاضلاع EFH برابر است با  $4 - y$  (مقدار y همان مساحت قسمت هاشورخورده در شکل ۵ است).



(شکل ۵)

چون مثلث FEH متساوی الاضلاع است، پس اندازه ی هر زاویه ی آن  $60^\circ$  درجه است. در این صورت، متمم های زاویه های

محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشور خورده برابر با  
 مساحت قطاع EFH به مرکز F بنابراین،  
 مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی است، برابر  
 است با:

$$S_{EH} = \frac{2\pi}{3} - S_{\triangle EFH} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \quad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲، مساحت قسمت Z به صورت زیر  
 محاسبه می شود:

$$Z = 4S_{EH} = 2\sqrt{3} + 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

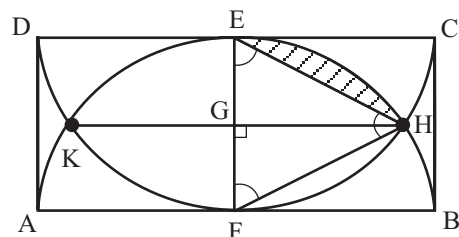
پس  $Z = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$ . حال می توانیم از روابط موجود در

روش اول، نسبت به محاسبه ی مقادیر x و y اقدام کنیم. بعد از  
 محاسبه، مقدار مساحت قسمت هاشور خورده برابر با

$$2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

### روش پنجم

در این روش نیز مانند روش های قبل، تمام مسئله، یافتن مقدار  
 Z است. یک راه دیگر برای یافتن مقدار Z به این صورت است که:  
 مساحت ربع دایره به مرکز E که در شکل زیر ECF نام گذاری شده  
 است را بیابیم و مساحت های قطاع EHC و مثلث EGH و سطح  
 GFH را از آن کم کنیم.



(شکل ۷)

برای این منظور داریم:

(مساحت قطاع EHC + مساحت مثلث EGH) - مساحت ربع

دایره = مساحت سطح GFH

پس:

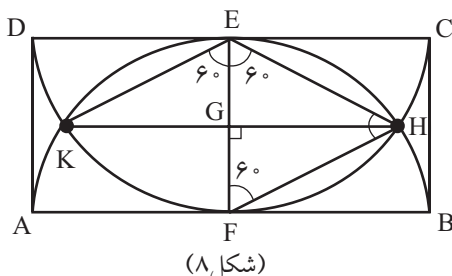
$$S_{GFH} = \pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{4}Z = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Z = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

حال مانند روش اول، مقادیر x و y را محاسبه می کنیم. بعد از

### روش ششم

می توانیم برای محاسبه ی مقدار Z از قضیه ی کسینوس ها استفاده  
 کنیم. در شکل ۸، مثلث KEH را در نظر بگیرید. می خواهیم مانند  
 روش چهارم، از مساحت لوزی و چهار قطاع اطراف آن استفاده  
 کنیم. ولی این بار برای پیدا کردن قطر بزرگ لوزی، به قضیه ی  
 کسینوس ها متوسل می شویم. مثلث EFH متساوی الاضلاع است  
 و طبق تقارنی که در مسئله وجود دارد، زاویه ی KEH برابر ۱۲۰  
 درجه خواهد بود.



(شکل ۸)

حال داریم:  $KH^2 = EK^2 + EH^2 - 2EK \cdot EH \cdot \cos 120^\circ$

$$KH^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$$

هم چنین مساحت قطاع EH که یکی از چهار قطاع اطراف لوزی  
 است، به روش زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \text{مساحت قطعه ی EH} &= \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

بنابراین مساحت لوزی برابر با  $2\sqrt{3}$  و مساحت تمام قسمت Z

$$Z = 4S_{EH} = 2\sqrt{3} + 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

خواهد شد. حال می توانیم مانند قسمت های قبل به محاسبه ی مقادیر  
 x و y پردازیم و بعد از محاسبه ی این مقادیر، مساحت قسمت  
 هاشور خورده مساوی  $2y + z = 8 + \frac{4\pi}{3} - 4\sqrt{3}$  به دست می آید.



۱. برگزیده مسائل هندسه، گروهی از ریاضی دانان شوروی. ترجمه ی عادل ارشقی.  
 انتشارات رسا.

۲. رشد آموزش ریاضی.