رسم نمودار تابع

(درجه‌ی دوم، درجه‌ی سوم، هموگرافیک و مثلثاتی)

● احمد قندهاری

ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^{۲} + bx + c$ است.

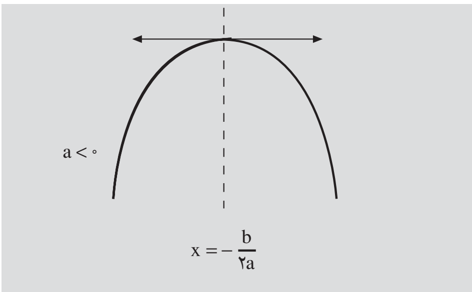
۱. اگر $a > ۰$، آن‌گاه نمودار تابع یک مینی‌مم نسبی، و اگر $a < ۰$، نمودار تابع یک ماکزی‌مم نسبی دارد.

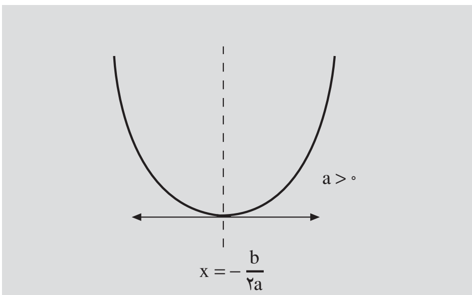
۲. $x = -\frac{b}{۲a}$ طول اکسترمم نسبی و $y = \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$ عرض اکسترمم نسبی است.

۳. خط به معادله‌ی $x = -\frac{b}{۲a}$ معادله‌ی محور تقارن نمودار تابع است.

۴. اگر خط y=m نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ax^{۲} + bx + c$ را در نقاط A و B قطع کند، مکان هندسی نقطه‌ی C وسط AB، قسمتی از خط $x = -\frac{b}{۲a}$ است که درون کاسه‌ی منحنی است.

۵. شکل کلی این تابع به صورت‌های زیر است:





برای رسم نمودار تابع چنین عمل می‌کنیم:

الف) ریشه‌ی معادله‌ی $y'_x = 0$ را محاسبه می‌کنیم.

ب) به x صفر می‌دهیم و y را محاسبه می‌کنیم و به y صفر می‌دهیم، xها را محاسبه می‌کنیم.

چنان‌چه معادله‌ی $y = 0$ ، ریشه‌های حقیقی نداشته باشد یا ریشه‌های آن کسری یا رادیکالی باشد، از نقاط کمکی برای رسم استفاده می‌کنیم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم. در سطر اول xها را می‌نویسیم و در سطر دوم y'_x را تعیین علامت می‌کنیم. سپس جدول را کامل می‌کنیم. به کمک جدول و مطالب فوق، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

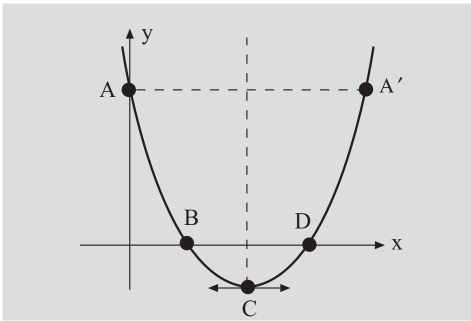
مسئله‌ی۱. مطلوب است رسم جدول و نمودار هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

۱) $y = x^2 - 4x + 3$

طول نقطه‌ی مینی‌مم نسبی $\quad y'_x = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \ , \ y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \ , \ x = 3$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty \ , \ x = 2 \Rightarrow y = 4 - 8 + 3 = -1$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'_x		−		−		−	0	+		+	
y	$+\infty$	↘	3	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	$+\infty$
			A		B		C		D		

۲) $y = 2x^2 - 4x - 1$

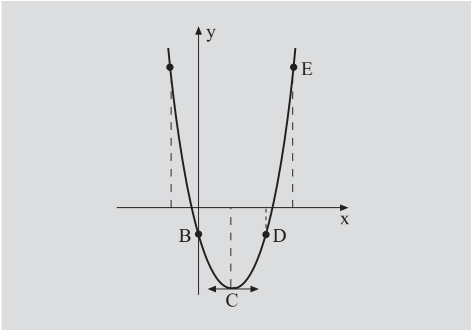
طول مینی‌مم نسبی $\quad y'_x = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

از حل معادله‌ی $y = 0$ صرف‌نظر می‌کنیم، زیرا جواب‌های معادله‌ی $y' = 0$ رادیکالی است. برای بهتر رسم کردن منحنی، دو عدد ۲ و ۳ در سمت راست جواب مشتق و دو عدد ۰ و ۱− در سمت چپ جواب مشتق به‌عنوان xهای کمکی می‌نویسیم.

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$

			کمکی						کمکی				
x	$-\infty$		−1		0		1		2		3		$+\infty$
y'_x		−		−		−	0	+		+		+	
y	$+\infty$	↘	5	↘	−1	↘	−3	↗	−1	↗	5	↗	$+\infty$
			A		B		C		D		E		



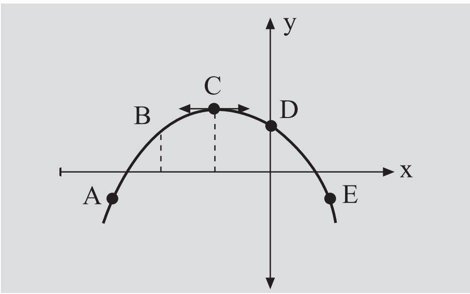
۳) $y = -\frac{x^2}{2} - x + 1$

طول نقطه‌ی ماکزی‌مم نسبی $\quad y'_x = -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to -\infty$

			کمکی						کمکی				
x	$-\infty$		−3		−2		−1		0		1		$+\infty$
y'_x		+		+		+	0	−		−		−	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$
			A		B		C		D		E		



مسئله‌ی۲. در تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 + bx + c$ ، a ، b و c را چنان بیابید که نمودار تابع، محور yها را در نقطه‌ای به عرض (۱) قطع کند و نقطه‌ی (۱و−۱) اکسترمم نسبی تابع باشد.

حل: نقطه‌ی تقاطع منحنی با محور yها $\quad A(0,1)$

نقطه‌ی اکسترمم نسبی $\quad M(1,-1)$

$$A(0,1) \xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} 1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 1$$

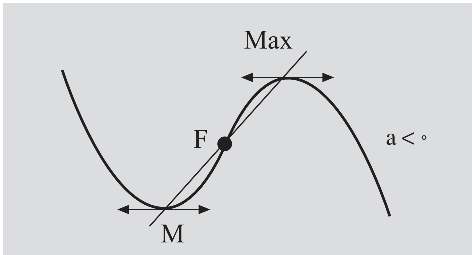
$$x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

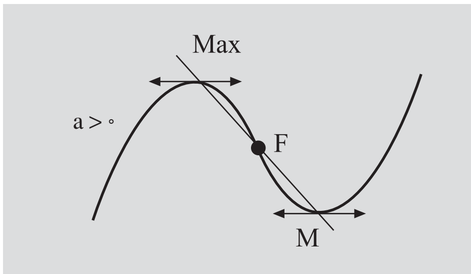
$$y=\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=-۱\Rightarrow\frac{۴a-b^۲}{۴a}=-۱\Rightarrow -۴a=۴a-b^۲$$
$$\Rightarrow b^۲-۸a=۰\Rightarrow ۴a^۲-۸a=۰\Rightarrow ۴a(a-۲)=۰\ ,\ a\neq ۰$$
$$\Rightarrow a-۲=۰\Rightarrow a=۲\ ,\ b=-۲a\Rightarrow b=-۴$$

رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم

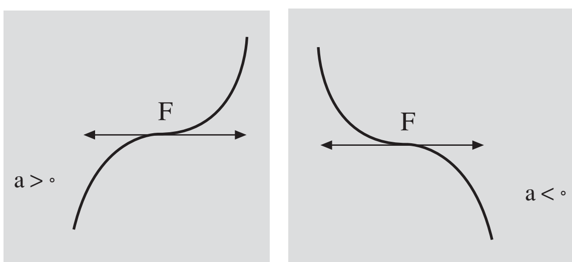
این تابع در حالت کلی به‌صورت $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$ است.

۱. اگر معادله‌ی $y'_x=۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز داشته باشد، نمودار تابع یک ماکزی‌مم نسبی و یک مینی‌مم نسبی دارد که نقطه‌ی عطف به‌طول $x=-\frac{b}{۳a}$ در وسط آن‌ها قرار دارد و مرکز تقارن نمودار تابع است.

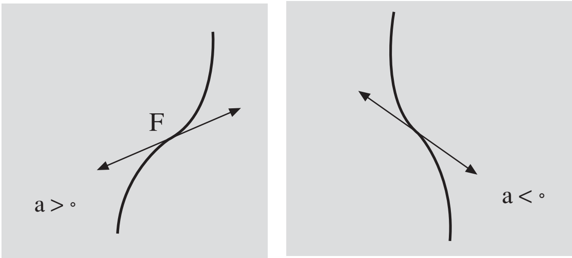




۲. اگر معادله‌ی $y'_x=۰$ ریشه‌ی حقیقی مضاعف داشته باشد، آن ریشه طول نقطه‌ی عطف است و نمودار تابع، نقاط اکسترمم نسبی ندارد.



۳. اگر معادله‌ی $y'_x=۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، باز هم منحنی تابع نقاط اکسترمم نسبی دارد.



برای رسم نمودار تابع درجه‌ی سوم، ابتدا معادله‌ی $y'_x=۰$ را حل و ریشه‌های آن را محاسبه می‌کنیم. چنان‌چه معادله‌ی $y'_x=۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، از ریشه‌ی $y''=۰$ به‌عنوان نقطه‌ی اصلی منحنی استفاده می‌کنیم. البته ریشه‌ی $y''=۰$ طول نقطه‌ی عطف است. سپس مانند تابع درجه‌ی دوم حل را ادامه می‌دهیم.

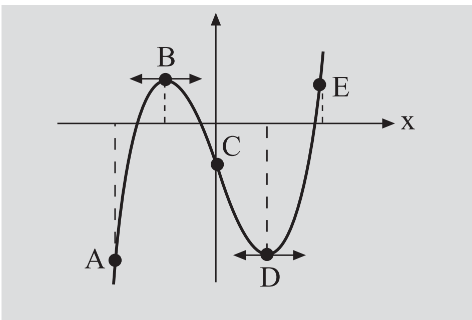
مسئله: مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات هر یک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

۱) $y=x^۳-۳x-۱$

طول‌های اکسترمم نسبی

$$y'_x=۳x^۲-۳=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=۱$$
$$x=۰\Rightarrow y=-۱\ ,\ x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\pm\infty$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
y'_x		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	-۳	↗	۱	↘	-۱	↘	-۳	↗	۱	↗	$+\infty$
			A		B		C		D		E		

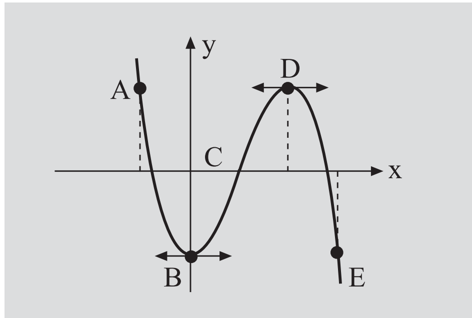


۲) $y=-x^۳+۳x^۲-۲$

طول‌های اکسترمم نسبی

$$y'_x=-۳x^۲+۶x=۰\Rightarrow -۳x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۲$$
$$x\to\pm\infty\Rightarrow y\to\mp\infty$$
$$x=۰\Rightarrow y=-۲$$

x	-∞		-۱		۰		۱		۲		۳		+∞
y'_x		−		−	۰	+		+	۰	−		−	
y	+∞	↘	۲	↘	-۲	↗	۰	↗	۲	↘	-۲	↘	-∞
			A		B		C		D		E		

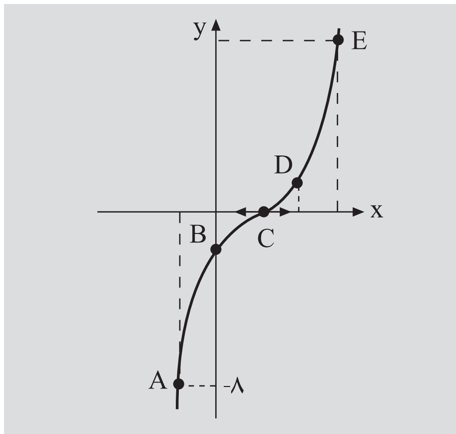


معادله ریشه‌ی مضاعف دارد، پس $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف است.

۳) $y=(x-۱)^۳$

$y'_x=۳(x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱$

$x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\pm\infty$



x	-∞		-۱		۰		۱		۲		۳		+∞
y'_x		+		+		+	۰	+		+		+	
y	-∞	↗	-۸	↗	-۱	↗	۰	↗	۱	↗	۸	↗	+∞
			A		B		C		D		E		

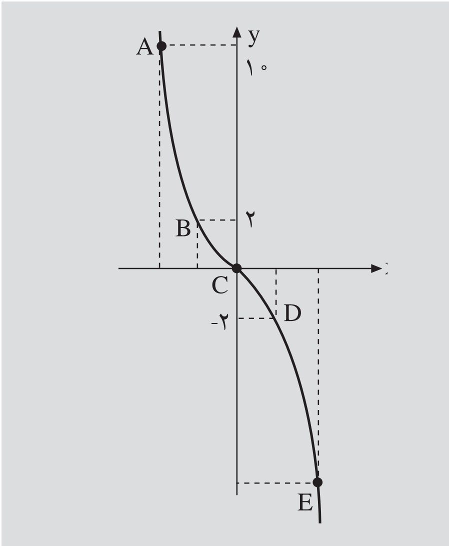
معادله‌ی $y'_x=۰$ ریشه‌های حقیقی ندارد.

۴) $y=-x^۳-x$

$y'_x=-۳x^۲-۱=۰ \Rightarrow x^۲=-\frac{۱}{۳}$

$y'_x=-۶x=۰ \Rightarrow x=۰$

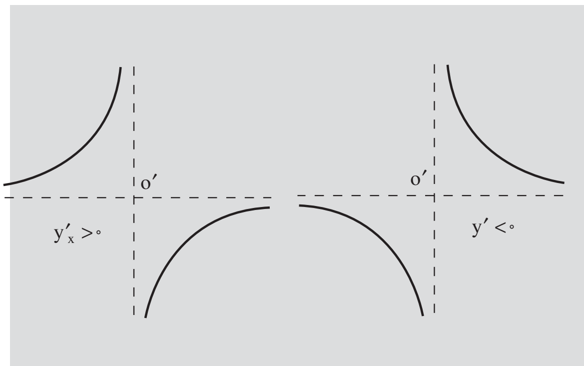
$x\to\pm\infty \Rightarrow y\to\mp\infty$



x	-∞		-۲		-۱		۰		۱		۲		+∞
y'_x		−		−		−		−		−		−	
y	+∞	↘	۱۰	↘	۲	↘	۰	↘	-۲	↘	-۱۰	↘	-∞
			A		B		C		D		E		

رسم نمودار تابع هموگرافیک

ضابطه‌ی تابع هموگرافیک در حالت کلی به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، $c\neq ۰$ است. نمودار این تابع یک مجانب قائم به معادله‌ی $x=-\frac{d}{c}$ و یک مجانب افقی به معادله‌ی $y=\frac{a}{c}$ دارد. اگر $y'_x>۰$ ، تابع اکیداً صعودی و اگر $y'_x<۰$ ، تابع اکیداً نزولی است.



محل تلاقی مجانب‌ها یعنی نقطه‌ی $O'(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ مرکز تقارن منحنی است. برای رسم جدول تغییرات و نمودار تابع، ابتدا معادله‌های مجانب‌های قائم و افقی را به‌دست می‌آوریم و سپس y'_x را محاسبه می‌کنیم. برای رسم دقیق نمودار، در دست داشتن

یک نقطه از منحنی کافی است. زیرا محل تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن منحنی است. جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم و پس از آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مسئله‌ی ۱. جدول تغییرات و نمودار هریک از تابع‌های با ضابطه‌ی زیر را بیابید.

۱) $y=\frac{2x+1}{2x-1}$

معادله‌ی مجانب قائم

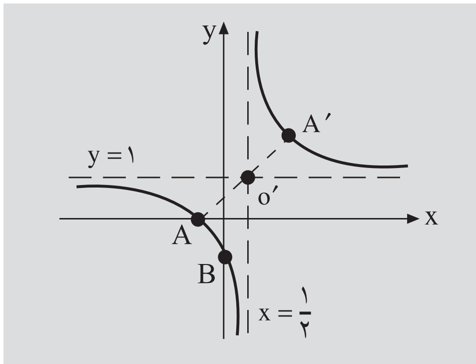
$y\to\pm\infty \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$: مجانب قائم

معادله‌ی مجانب افقی

$x\to\pm\infty \Rightarrow y=\frac{2}{2} \Rightarrow y=1$: مجانب افقی

$x=0\Rightarrow y=-1$ و $y=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$y'_x=\frac{-4}{(2x-1)^2}<0$



x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'_x		−		−		−	‖	−	
y	1	↘	0 (A)	↘	−1 (B)	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

۲) $y=\frac{\sqrt{2}x}{x+1}$

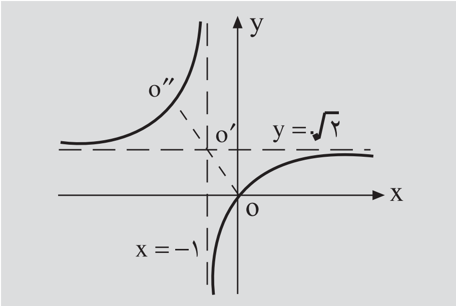
معادله‌ی مجانب قائم

$y\to\pm\infty \Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1$: مجانب قائم

معادله‌ی مجانب افقی

$x\to\pm\infty \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{1}\Rightarrow y=\sqrt{2}$: مجانب افقی

$x=0\Rightarrow y=0$ و $y'_x=\frac{\sqrt{2}}{(x+1)^2}>0$



x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'_x		+	‖	+		+	
y	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt{2}$

مسئله‌ی ۲. در تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر نمودار تابع از مبدأ مختصات بگذرد و نقطه‌ی $O'(1,2)$ مرکز تقارن نمودار تابع باشد، معادله‌ی تابع را بیابید.

حل:

$O(0,0)\xrightarrow{\text{در معادله‌ی تابع}} 0=\frac{b}{d}\Rightarrow b=0$

$y=\frac{a}{c}=2\Rightarrow a=2c$: مجانب افقی و

$x=-\frac{d}{c}=1\Rightarrow d=-c$: مجانب قائم

$c\neq 0\Rightarrow y=\frac{2x}{x-1}$ و

$y=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow y=\frac{2cx+0}{cx-c}\Rightarrow y=\frac{2cx}{c(x-1)}$

رسم نمودار تابع‌های با ضابطه‌ی مثلثاتی

الف) معادله‌ی $y'_x=0$ را حل می‌کنیم و جواب‌های آن را در بازه‌ی داده شده محاسبه می‌کنیم.

ب) مختصات نقاط تقاطع نمودار تابع را با محورهای مختصات به‌دست می‌آوریم.

ج) جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم و پس از تکمیل آن، نمودار تابع را در بازه‌ی داده شده رسم می‌کنیم.

مسئله: مطلوب است رسم جدول و نمودار هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر:

۱) $y=\sin^2 x-\sin x \qquad 0\le x\le 2\pi$

$y'_x=2\cos x\sin x-\cos x=0\Rightarrow \cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

$2\sin x-1=0\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{۶}\\[2mm] x=۲k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{۶}\Rightarrow x=\dfrac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

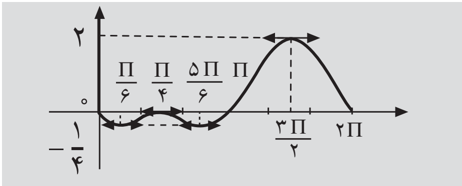
$x=۰$ یا $۲\pi\Rightarrow y=\sin^{۲}۰-\sin=۰$

$y=۰\Rightarrow \sin^{۲}x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x(\sin x-۱)=۰$

$\Rightarrow \sin x=۰\Rightarrow x=k\pi$

$\Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi,\ \ \sin=۱\Rightarrow x=۲k\pi+\dfrac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{۲}$

x	۰		$\frac{\Pi}{۶}$		$\frac{\Pi}{۲}$		$\frac{۵\Pi}{۶}$		Π		$\frac{۳\Pi}{۲}$		۲Π
y'_x		−	۰	+	۰	−	۰	+		+	۰	−	
y	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰	↗	۲	↘	۰



۲) $y=\cos^{۲}x+\cos x-۲ \qquad ۰\le x\le ۲\pi$

$y'_x=-۲\sin x\cos x-\sin x=۰\Rightarrow -\sin x(۲\cos x+۱)=۰$

$\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi,$

$۲\cos x+۱=۰\Rightarrow \cos x=-\dfrac{۱}{۲}$

$\cos x=\cos\dfrac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\dfrac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=\dfrac{۲\pi}{۳},\dfrac{۴\pi}{۳}$

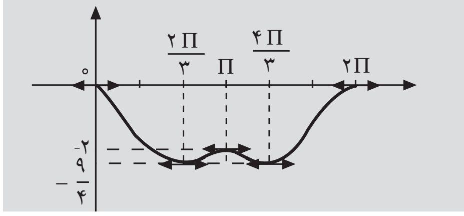
$x=۰$ یا $۲\pi\Rightarrow y=\cos^{۲}۰+\cos۰-۲=۱+۱-۲=۰$

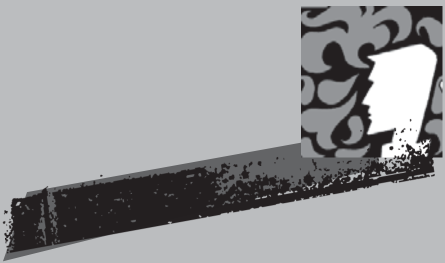
$y=۰\Rightarrow \cos^{۲}x+\cos x-۲=۰$ مجموع ضرائب صفر است

$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=۱\\ \cos x=-۲\end{cases}$ غیرممکن

$\cos x=۱\Rightarrow x=۲k\pi\Rightarrow x=۰,۲\pi$

x	۰		$\frac{۲\Pi}{۳}$		Π		$\frac{۴\Pi}{۳}$		۲Π
y'_x	۰	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰
y	۰	↘	$-\frac{۹}{۴}$	↗	-۲	↘	$-\frac{۹}{۴}$	↗	۰





اعداد جالب ریاضی

$۱۰۲\times۱۰۲=۱۰۴۰۴$
$۲۰۱\times۲۰۱=۴۰۴۰۱$

$۱۰۳\times۱۰۳=۱۰۶۰۹$
$۳۰۱\times۳۰۱=۹۰۶۰۱$

به مربع اعداد هم توجه کنید.

$۱۰۳^{۲}=۱۰۶۰۹$
$۳۰۱^{۲}=۹۰۶۰۱$

$۱۱۲^{۲}=۱۲۵۴۴$
$۲۱۱^{۲}=۴۴۵۲۱$

$۱۳^{۲}=۱۶۹$
$۱۴^{۲}=۱۹۶$

$۱۱۳^{۲}=۱۲۷۶۹$
$۳۱۱^{۲}=۹۶۷۲۱$

$۱۲۲^{۲}=۱۴۸۸۴$
$۲۲۱^{۲}=۴۸۸۴۱$

$۱۵۷^{۲}=۲۴۶۴۹$
$۱۵۸^{۲}=۲۴۹۶۴$

$۹۱۳^{۲}=۸۳۳۵۶۹$
$۹۱۴^{۲}=۸۳۵۳۹۶$

$۱^{۳}+۵^{۳}+۳^{۳}=۱۵۳$
$۳^{۳}+۷^{۳}+۰^{۳}=۳۷۰$
$۳^{۳}+۷^{۳}+۱^{۳}=۳۷۱$
$۴^{۳}+۰^{۳}+۷^{۳}=۴۰۷$
$۴۸^{۲}+۵۳^{۲}+۶۲^{۲}=۸۴^{۲}+۳۵^{۲}+۲۶^{۲}$