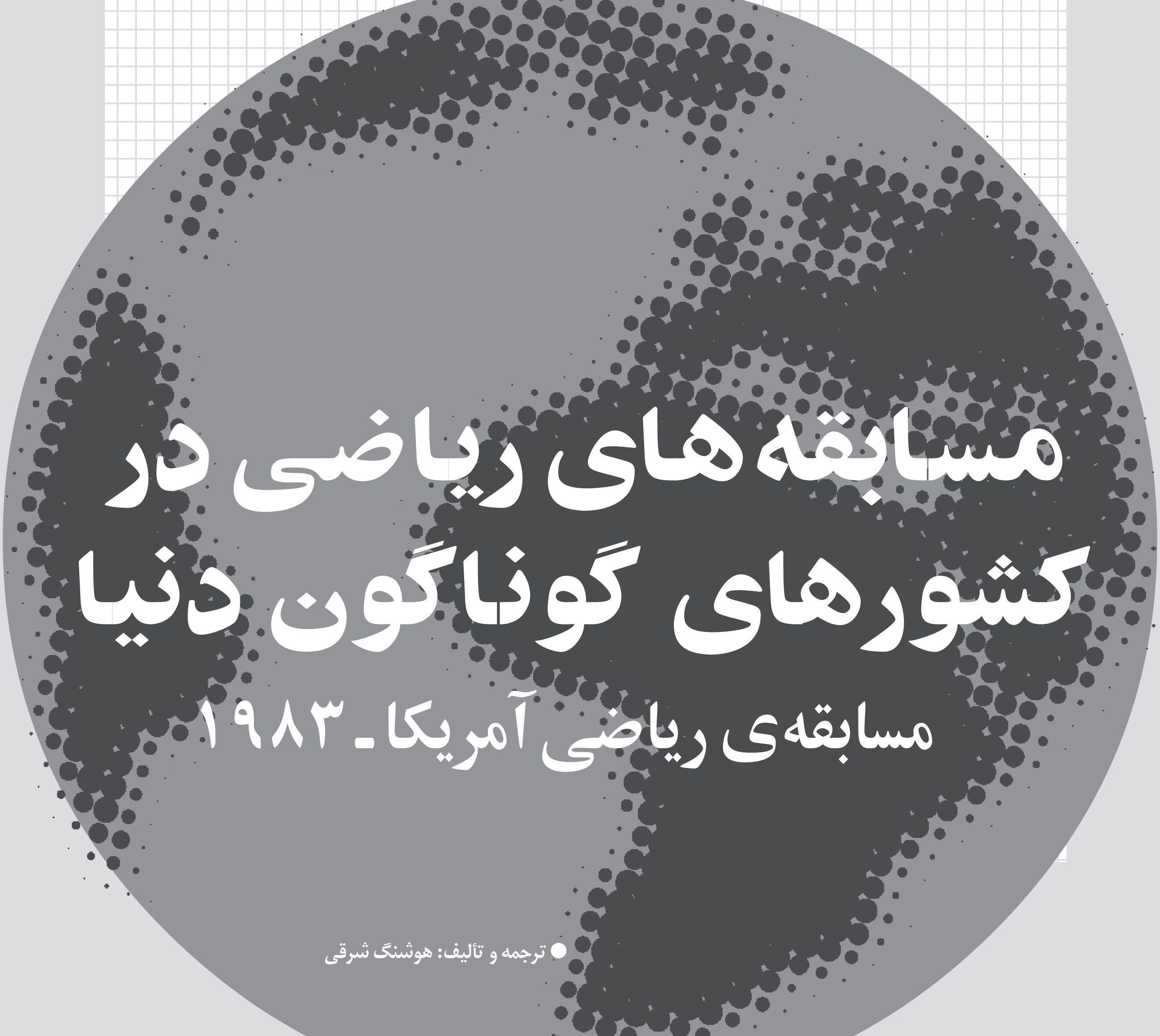


مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون دنیا

مسابقه‌ی ریاضی آمریکا ـ ۱۹۸۳

● ترجمه و تألیف: هوشنگ شرقی

همان‌گونه که در یکی از شماره‌های پیشین مجله‌ی برهان متذکر شدیم، مسابقات ریاضی مدارس آمریکا در دو سطح متفاوت مقدماتی (AHSME) و پیشرفته (AIME) برگزار می‌شود. برگزیدگان مسابقه‌ی AIME به مرحله‌ی المپیاد ریاضی دعوت می‌شوند. در این شماره و شماره‌ی آینده، سؤالات مسابقه‌ی ریاضی AIME سال ۱۹۸۳ آمریکا همراه با راه‌حل آن‌ها را ارائه می‌دهیم. تعداد سؤالات آزمون ۱۵ سؤال بوده است.

صورت مسائل

۱. فرض کنید x و y و z بزرگ‌تر از ۱، و w عددی مثبت باشد،

به‌طوری که:

$\log_x^w = ۲۴$ و $\log_y^w = ۴۰$ و $\log_{xyz}^w = ۱۲$

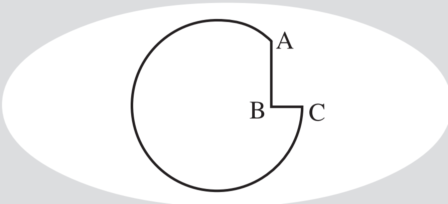
مقدار $\log_z^w$ را به‌دست آورید.

۲. فرض کنید: $f(x) = |x-p| + |x-۱۵| + |x-p-۱۵|$، به‌طوری که $۰ < p < ۱۵$. مینی‌مم مقدار $f(x)$ را به ازای $p \le x \le ۱۵$ به‌دست آورید.

۳. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$x^۲ + ۱۸x + ۳۰ = ۲\sqrt{x^۲ + ۱۸x + ۴۵}$$

۴. یک ماشین‌افزار به شکلی شبیه یک دایره‌ی برش‌خورده به‌صورت زیر است. شعاع دایره $\sqrt{۵۰}$ سانتی‌متر، AB، ۶ سانتی‌متر، BC، ۲ سانتی‌متر و زاویه‌ی ABC قائمه است. مربع فاصله‌ی B تا مرکز دایره را (با واحد سانتی‌متر) به‌دست آورید.



۵. فرض کنید مجموع مربعات دو عدد مختلط مساوی ۷ و مجموع مکعبات آن‌ها ۱۰ باشد. بیشترین مقدار حقیقی $x + y$ چیست؟

۶. فرض کنید $a_n = ۶^n + ۸^n$. باقی‌مانده‌ی تقسیم $a_{۸۳}$ را بر ۴۹ به‌دست آورید.

۷. ۲۵ نفر از شوالیه‌های آرتورشاه دور میزگرد همیشگی خودشان نشسته‌اند.[۱] ۳ نفر از آن‌ها انتخاب شده‌اند ـ شانس هر ۳ نفر از این جمع برای انتخاب یکسان بوده است ـ تا برای به قتل رساندن یک اژدهای مزاحم اعزام شوند. فرض کنید p احتمال آن باشد که لااقل ۲ نفر از این ۳ نفر، کنار هم نشسته باشند. هرگاه p به‌صورت یک کسر تحویل‌ناپذیر نوشته شود، مجموع صورت و مخرج آن چیست؟

۸. بزرگ‌ترین عامل اول دو رقمی عدد صحیح $n = \binom{۲۰۰}{۱۰۰}$ چیست؟

حل مسائل

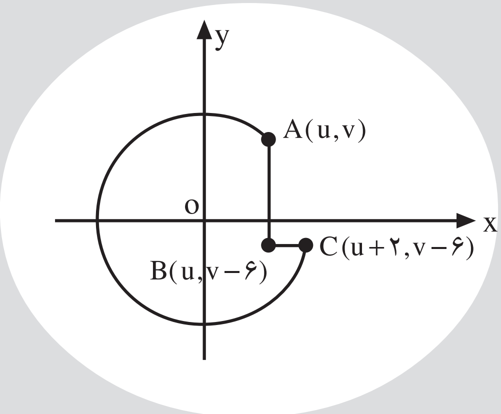
۱. از قضیه‌ی $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$ استفاده می کنیم:

$$\log_w^x = \frac{۱}{۲۴}\ ,\quad \log_w^y = \frac{۱}{۴۰}\ ,\quad \log_w^{xyz} = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \log_w^x + \log_w^y + \log_w^z = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲۴} + \frac{۱}{۴۰} + \log_w^z = \frac{۱}{۱۲}$$

$$\Rightarrow \log_w^z = \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow \log_z^w = ۶۰$$

۲. به سادگی روشن است که $x - p \ge ۰$ و درنتیجه:



$|x-p| = x-p$ و $x-۱۵ \le ۰$ و $|x-۱۵| = ۱۵-x$ و $x < ۱۵+p$. بنابراین: $x-p-۱۵ \le ۰$ و $|x-p-۱۵| = ۱۵+p-x$. از آن‌جا:

$$f(x) = x-p+۱۵-x+۱۵+p-x = ۳۰-x$$

و مینیمم $f(x)$ به ازای ماکزیمم x به‌دست می‌آید:

$$\min f = ۳۰-۱۵ = ۱۵$$

۳.
$$x^۲ + ۱۸x + ۳۰ = t$$
$$\Rightarrow t = ۲\sqrt{t+۱۵} \Rightarrow t^۲ = ۴t + ۶۰ \Rightarrow t^۲ - ۴t - ۶۰ = ۰$$
$$\Rightarrow (t-۱۰)(t+۶) = ۰ \Rightarrow t = ۱۰$$ یا $t = -۶$ غیرقابل قبول (چرا؟)
$$\Rightarrow x^۲ + ۱۸x + ۳۰ = ۱۰$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۱۸x + ۲۰ = ۰$$

و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی اخیر مساوی ۲۰ است.

۴. مسئله را به روش تحمیلی حل می‌کنیم. دایره را مطابق شکل در یک دستگاه مختصات قرار می‌دهیم، به‌طوری که مرکز آن در مبدأ مختصات باشد. فرض می‌کنیم $A(u,v)$ باشد. با توجه به اطلاعات مسئله، $B(u, v-۶)$ و $C(u+۲, v-۶)$ است و معادله‌ی دایره به صورت $x^۲ + y^۲ = ۵۰$ خواهد بود. چون C و A روی دایره هستند، بنابراین: $u^۲ + v^۲ = ۵۰$ و $(u+۲)^۲ + (v-۶)^۲ = ۵۰$ و از این دو معادله مقادیر u و v را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} u^2+v^2=50 \\ u^2+v^2+4u-12v=10 \Rightarrow 4u-12v=-40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u-3v+10=0 \Rightarrow u=3v-10 \Rightarrow v^2+(3v-10)^2=50$$

$$\Rightarrow v^2-6v+5=0 \Rightarrow v=1 \quad \text{یا} \quad v=5$$

$$\Rightarrow (u,v)=(-7,1) \quad \text{یا} \quad (5,5)$$

و چون A در ناحیه‌ی اول مختصات است، پس $A(5,5)$ و $B(5,-1)$ و مربع فاصله‌ی B از مرکز دایره برابر است با:

$$oB^2=26$$

۵. دو عدد را x و y فرض می‌کنیم. طبق مفروضات مسئله داریم:

$$x^2+y^2=7\ ,\ x^3+y^3=10$$

با فرض $x+y=s$ و $xy=p$ خواهیم داشت:

$$s^2-2p=7 \ \text{و}\ s^3-3sp=10 \ \text{و}\ p=\frac{s^2-7}{2}$$

$$\Rightarrow s^3-3s\left(\frac{s^2-7}{2}\right)=10 \Rightarrow s^3-21s+20=0$$

$$\Rightarrow s^3-s-20s+20=0 \Rightarrow s(s-1)(s+1)-20(s-1)=0$$

$$\Rightarrow (s-1)(s^2+s-20)=0 \Rightarrow (s-1)(s-4)(s+5)=0$$

$$\Rightarrow s=1 \ \text{یا}\ s=4 \ \text{یا}\ s=-5 \ \text{و}\ Max(s)=4$$

۶. از بسط دوجمله‌ای نیوتون استفاده می‌کنیم:

$$a_{83}=6^{83}+8^{83}=(7-1)^{83}+(7+1)^{83}$$

$$=7^{83}-\binom{83}{1}7^{82}+\binom{83}{2}7^{81}-\cdots+\binom{83}{82}7-1+$$

$$7^{83}+\binom{83}{1}7^{82}+\binom{83}{2}7^{81}+\cdots+\binom{83}{82}7+1$$

$$=2\left(7^{83}+\binom{83}{2}7^{81}+\cdots+\binom{83}{82}7\right)$$

$$=2\times49\left(7^{81}+\binom{83}{2}7^{79}+\cdots+\binom{83}{80}\right)+14\times83$$

$$\Rightarrow a_{83}=49k+1162 \Rightarrow a_{83}\overset{49}{\equiv}1162\overset{49}{\equiv}35$$

۷. بهتر است مسئله را در حالت کلی که n شوالیه دور میزگرد باشند، حل کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که n سه‌تایی می‌توان انتخاب کرد که هر سه نفر کنار هم نشسته باشند (کافی است هر نفر را درنظر بگیریم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، او و دو نفر مجاورش را یک سه‌تایی فرض کنیم. در این صورت n سه‌تایی خواهیم داشت که هر سه کنار هم باشند). سپس باید سه‌تایی‌هایی را بشماریم که فقط دو نفر آن‌ها همسایه‌ی هم باشند. به این منظور فرض می‌کنیم، A و B دو شوالیه‌ی مجاور باشند. اگر C و D دو نفر کناری دیگر آن‌ها باشند، تمام سه‌تایی‌هایی را می‌خواهیم که شامل A و B باشند و شامل هیچ‌یک از C و D نباشند. بنابراین $n-4$ سه‌تایی می‌توان به این صورت تشکیل داد. با درنظر گرفتن همه‌ی دوتایی‌های به‌همین شکل، نتیجه می‌گیریم که $n(n-4)$ سه‌تایی هم به این صورت وجود دارد. بنابراین: $n(A)=n+n(n-4)=n(n-3)$ و بدیهی است که: $n(s)=\binom{n}{3}$. لذا:

$$p(A)=\frac{x(A)}{x(s)}=\frac{x(n-3)}{\binom{n}{3}}=\frac{6(8-3)}{(x-1)(x-2)}$$

و در این حالت خاص:

$$p=\frac{6\times22}{24\times23}=\frac{11}{46}\Rightarrow 11+46=57$$

۸. می‌توانیم بنویسیم:

$$\binom{200}{100}=\frac{200!}{(100!)^2}=\frac{101\times102\times103\times\cdots\times200}{1\times2\times3\times\cdots\times100}$$

$$=\frac{101\times103\times105\times\cdots\times199}{1\times2\times3\times\cdots\times50}\times2^{50}$$

حال باکمی دقت درمی‌یابیم که صورت این کسر بر مخرج آن بخش‌پذیر و برابر با یک عدد صحیح است. ولی با شرط $A=\frac{101\times103\times105\times\cdots\times199}{1\times2\times3\times\cdots\times50}$ واضح است که صورت A شامل هیچ عدد زوجی نیست و لذا در صورت این کسر نمی‌توان دو برابر یک عدد اول دو رقمی را داشت. پس به دنبال سه برابر یک عدد اول دو رقمی می‌گردیم؛ یعنی $3p\le200$. درنتیجه $p<\frac{200}{3}$ و بزرگ‌ترین عدد اولی که در این شرط صدق می‌کند، $p=61$ است. در واقع: $61\times3=183$ و لذا بزرگ‌ترین عامل اول دو رقمی این عدد، ۶۱ است.

۱. اشاره به کتاب معروف «آرتورشاه و شوالیه‌های میزگرد».