روش یافتن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی خاص با استفاده از «تفاضلات تقسیم شده» و «تفاضلات پیشرو»

گردآورنده: سیمین اکبری‌زاده،
دبیر ریاضی اراک

مقدمه

به‌نام خدایی که مجموعه‌ی نعمت‌هایش ناشمار است و آن‌چه نصیب آفریده‌هایش می‌کند، دنباله‌ای است صعودی و بی‌پایان. در این مقاله بیان شده است که با در دست داشتن چند جمله از جملات یک دنباله و با فرض آن‌که ضابطه‌ی دنباله یک چند جمله‌ای باشد، می‌توانیم جمله‌ی عمومی دنباله را بیابیم. به این منظور دو روش بیان شده است:

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو. این روش هنگامی قابل استفاده است که چند جمله‌ی دنباله را به ترتیب، یک در میان، دو در میان و... و j در میان داشته باشیم.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده. این روش همیشه و به خصوص هنگامی قابل استفاده است که فاصله‌ی بین اندیس جملات داده شده برابر نباشد.

تعریف: اگر $\{a_n\}_{n\geq j}$ دنباله‌ای باشد که فاصله‌ی هر دو اندیس متوالی آن h باشد، یعنی: $\{a_n\}_{n\geq j}: a_j, a_{j+h}, a_{j+2h}, \dots$ آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی صفرم}: \Delta^0 a_i = a_i \\ a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی nام}: \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+h} - \Delta^{n-1} a_i \quad , \quad i = j, j+h, j+2h \end{cases}$$

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n\geq 0}$ یک دنباله باشد با جملات $a_0, a_1, a_2, \dots$ $(j=0 \ , \ h=1)$، آن‌گاه:

$$\begin{cases} a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی صفرم}: \Delta^0 a_i = a_i \\ a_i \quad \text{تفاضل پیشرو مرتبه‌ی nام}: \Delta^n a_i = \Delta^{n-1} a_{i+1} - \Delta^{n-1} a_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

مثال۱. جدول۱، جدول تفاضلات پیشروی دنباله ...و۱۰و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \dots$ نام‌گذاری شده باشند.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$	$\Delta^3 a_i$
۰	۲	۱-	۲	۰
۱	۱	۱	۲	۰
۲	۲	۳	۲	
۳	۵	۵		
۴	۱۰			

جدول ۱

نتیجه: در مثال۱، تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی دوم دنباله، ثابت و تفاضلات مرتبه‌ی سوم به بعد آن صفر است.

روش اول: استفاده از تفاضلات پیشرو

اگر در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n\geq j}$، (برای $k>p$) $\Delta^p a_j \neq 0, \Delta^k a_j = 0$ (به‌عبارت دیگر تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی pام دنباله ثابت باشد)، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله $\{a_n\}$، یک جمله‌ای درجه‌ی p به‌صورت زیر است:

فرمول(۱)

$$a_n = a_j + \Delta a_j\binom{\theta}{1} + \Delta^2 a_j\binom{\theta}{2}+\cdots+\Delta^p a_j\binom{\theta}{p} \qquad \theta=\frac{n-j}{h}$$

در این فرمول $\binom{\theta}{p}=\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)\cdots(\theta-p+1)}{p!}$ است. در ضمن فرض بر این است که فاصله‌ی اندیس‌های هر دو جمله‌ی متوالی دنباله برابر h باشد و اندیس جمله‌ی اول دنباله‌ی j باشد.

در حالت خاص، اگر جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ را با $a_0, a_1, a_2, \ldots$ نمایش دهیم، داریم: $h=1$, $j=0$. لذا: $\theta=n$.

پس:

فرمول(۲)

$$a_n = a_0+\Delta a_0\binom{n}{1}+\Delta^2a_0\binom{n}{2}+\cdots+\Delta^pa_0\binom{n}{p}$$

مثال۲. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ...۱۱و۸و۵و۲ با توجه به جدول۲ و ثابت بودن تفاضلات پیشروی مرتبه‌ی اول آن $a_n=a_0+\Delta a_0\binom{n}{1}=2+3n\ (n\geq 0)$ خواهد بود.

i	a_i	$\Delta^1 a_i$	$\Delta^2 a_i$
۰	۲	۳	۰
۱	۵	۳	۰
۲	۸	۳	۰
۳	۱۱		

جدول ۲

مثال۳. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ...و۱۰و۵و۲و۱و۲. با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \ldots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول۱ و فرمول ۲ به شکل زیر به‌دست خواهد آمد:

$$a_0=2, \Delta a_0=-1, \Delta^2 a_0=2 \Rightarrow a_n=2-1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}\Rightarrow$$

$$a_n=n^2-2n+2\ (n\geq 0)$$

طبق ضابطه به‌دست آمده:

$$a_0=2, a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=10$$

مثال۴. جمله‌ی عمومی دنباله‌ای با جملات ...و۱۰و۵و۲و۱و۲، با فرض آن‌که جملات با $a_1, a_2, \ldots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول ۱ و فرمول۱ به شکل زیر به‌دست خواهد آمد. داریم: $h=1$, $j=1$. لذا در فرمول ۱ به‌جای θ، $n-1$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$a_n=a_1+\Delta a_1\binom{n-1}{1}+\Delta^2 a_1\binom{n-1}{2}\Rightarrow a_n=2-1\binom{n-1}{1}+2\binom{n-1}{2}=n^2-4n+5\quad (n\geq 1)$$

مثال۵. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی

...و۱۰و□و□و۵و□و□و۲و□و□و۱و□و□و۲و□

را به‌دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ای را به‌دست آوریم که جملات آن را دو در میان می‌دانیم و:

$$a_2=2, a_5=1, a_8=2, a_{11}=5, a_{14}=10, \ldots$$

پس جملات دنباله‌ی ...و۱۰و۵و۲و۱و۲ را با $a_2, a_5, a_8, a_{11}, a_{14}, \ldots$ نام‌گذاری می‌کنیم. اگر بخواهیم مستقیماً از فرمول۱ استفاده می‌کنیم، با توجه به آن‌که $h=3$ و $j=2$، داریم: $\theta=\frac{n-2}{3}$. لذا:

$$a_n=a_2+\Delta a_2\binom{\frac{n-2}{3}}{1}+\Delta^2 a_3\binom{\frac{n-2}{3}}{2}\Rightarrow$$

$$a_n=2-\frac{n-2}{3}+2\times\frac{\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}-1\right)}{2!}=$$

$$a_n=\frac{n^2}{9}-\frac{10}{9}n+\frac{34}{9}$$

در غیر این صورت، با توجه به قاعده‌ی لغزاندن حدود کافی است، در فرمول به‌دست آمده در مثال۳، به‌جای n، $\frac{n-2}{3}$ قرار دهیم.

اینک ببینیم اگر فاصله‌ی اندیس‌های جملات دنباله برابر نباشد، چگونه می‌توان جمله‌ی عمومی دنباله را یافت.

تعریف: اگر $\{a(l_n)\}: a(l_0), a(l_2), \ldots, a(l_n), \ldots$ یک دنباله باشد،

$$\begin{cases} R_i^{0} = a(l_i) & \text{تفاضل تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی صفرم} \quad a(l_i) \\ R_i^{n} = \dfrac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{L_{i+n} - L_i} & a(l_i) \end{cases}$$

نکته‌ی قابل توجه آن است که چون امکان دارد اندیس‌های جملات هم فاصله نباشند، به‌جای آن‌که آن‌ها را با i نمایش دهیم، با L_i نمایش داده‌ایم.

در حالت خاص، اگر $\{a_n\}_{n\geq 0}$ یک دنباله باشد، با جملات $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$$\begin{cases} R_i^{0} = a_i & \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه صفرم} \quad a_i \\ R_i^{n} = \dfrac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{n} & \text{تفاضل تقسیم شده مرتبه nام} \quad a_i \end{cases}$$

مثال۶. جدول ۳، جدول تفاضلات تقسیم دنباله ...و۱۰و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \ldots$ نام‌گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = a_i = R_i^{0}$	R_i^{1}	R_i^{2}	R_i^{3}
۰	۰	۲	(۱-۲)/۱=-۱	(۱-(-۱))/۲=۱	۰
۱	۱	۱	(۲-۱)/۱=۱	(۳-۱)/۲=۱	۰
۲	۲	۲	(۵-۲)/۱=۳	(۵-۳)/۲=۱	
۳	۳	۵	(۱۰-۵)/۱=۵		
۴	۴	۱۰			

جدول۳

در این مثال، اندیس L_i همان i است، زیرا طبق نام‌گذاری: $L_0 = 0,\ L_1 = 1,\ L_2 = 2, \cdots$.

نتیجه: در مثال۶، تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی دوم دنباله ثابت است.

مثال۷. جدول۴، جدول تفاضلات تقسیم شده‌ی دنباله‌ی ...و۵و۲و۱و۲ است، با فرض آن‌که جملات با $a_1, a_5, a_7, a_8, \cdots$ نام‌گذاری شوند.

i	L_i	$a(L_i) = R_i^{0}$	$R_i^{1} = \frac{R_{i+1}^{0} - R_i^{0}}{L_{i+1} - L_i}$	$R_i^{2} = \frac{R_{i+1}^{1} - R_i^{1}}{L_{i+2} - L_i}$	$R_i^{3} = \frac{R_{i+1}^{2} - R_i^{2}}{L_{i+3} - L_i}$
۰	۱	۲	$\frac{1-2}{5-1} = -\frac{1}{4}$	$\frac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{4})}{7-1} = \frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{8}}{8-1} = \frac{17}{168}$
۱	۵	۱	$\frac{2-1}{7-5} = \frac{1}{2}$	$\frac{3-\frac{1}{2}}{8-5} = \frac{5}{6}$	
۲	۷	۲	$\frac{5-2}{8-7} = 3$		
۳	۸	۵			

جدول ۴

نتیجه: در مثال۷ هیچ‌یک از تفاضلات تقسیم شده‌ی مرتبه‌ی اول و دوم ثابت نیست، ولی می‌توان جملات بعد را چنان انتخاب کرد که تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم ثابت باشد.

روش دوم: استفاده از تفاضلات تقسیم شده

اگر در دنباله‌ی

$$R_0^{P} \neq 0,\ \ R_0^{K} = 0 (K > P). a(L_0), a(L_1), a(L_2), \cdots$$

(به‌عبارت دیگر، تفاضلات تقسیم شده مرتبه‌ی pام دنباله‌ی ثابت باشد)، آن‌گاه جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $\{a_n\}$، یک چند جمله‌ای درجه‌ی p به صورت زیر است:

فرمول۳

$$a_n = a(L_0) + R_0^{1}(n - L_0) + R_0^{2}(n - L_0)(n - L_1) + \cdots$$
$$+ R_0^{P}(n - L_0)(n - L_1)\cdots(n - L_{p-1})$$

مثال۸. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ۱۰و۵و۲و۱و۲، با فرض آن‌که جملات با $a_0, a_1, a_2, \cdots$ نام‌گذاری شده باشند، با توجه به جدول۳ به شکل زیر است:

داریم:

$$L_0 = 0,\ \ L_1 = 1,\ \ L_2 = 2,\ \ a(L_0) = 2,\ \ R_0^{1} = -1,\ \ R_0^{2} = 1$$

پس:

$$a_n = 2 - 1(n - 0) + 1(n - 0)(n - 1) = n^2 - 2n + 2 \quad n \geq 0$$

که همان جواب به‌دست آمده در مثال۳ است.

مثال۹. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ...و۵و۲و□و۱و□و□و□ و۲ را به‌دست می‌آوریم. در واقع می‌خواهیم ضابطه‌ی دنباله‌ای را به‌دست آوریم که: $a_1 = 2,\ \ a_5 = 1,\ \ a_7 = 2,\ \ a_8 = 5$. در این مثال، چون اندیس‌ها هم فاصله نیستند، نمی‌توان از فرمول۱ استفاده کرد و باید از فرمول۳ بهره گرفت. با توجه به جدول۴ و با فرض ثابت بودن تفاضلات تقسیم‌شده‌ی مرتبه‌ی سوم دنباله، a_n یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۳ است که:

$$L_0 = 1,\ \ L_1 = 5,\ \ L_2 = 7,\ \ L_3 = 8,\ \ a(L_0) = 2,$$
$$R_0^{1} = \frac{-1}{4},\ \ R_0^{2} = \frac{1}{8},\ \ R_0^{3} = \frac{17}{168}$$

پس:

$$a_n = 2 - \frac{1}{4}(n-1) + \frac{1}{8}(n-1)(n-5) + \frac{17}{168}$$
$$(n-1)(n-5)(n-7)$$

نتیجه: با فرض آن‌که ضابطه‌ی یک دنباله چند جمله‌ای باشد و