هم‌نهشتی و کاربردهای آن

۲ ۳ ۵ ۷ ۱۱ ۱۳ ۱۷ ۱۹ ۲۳ ۲۹ ۳۱ ۳۷ ۴۱ ۴۳...۲۰۰۳...

قسمت ۴

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در سه قسمت قبل، با مفهوم و تعریف و قوانین محاسبات هم‌نهشتی و هم‌چنین، با قضیه‌های اساسی و مهم هم‌نهشتی که در حل مسئله‌های متفاوت نقش بسیار مهمی را برعهده دارند، آشنا شدید. اینک در این شماره و شماره‌های آتی مجله، به برخی از کاربردهای مهم و اساسی هم‌نهشتی، مانند قواعد تعیین باقی مانده‌ها در تقسیم، محاسبه‌ی رقم یکان و باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد توانی و اعداد شامل فاکتوریل، حل معادله‌ها و دستگاه‌های هم‌نهشتی، حل معادله‌های سیاله‌ی خطی، غیرخطی و درجه‌ی nام kمجهولی به توسط قضیه‌ی کوچک فرما، اویلر و ویلسن و حل دیگر مسائل به کمک این قضایای کاربردی و مهم می‌پردازیم که خلاقیت و ابتکار عمل زیادی را طلب می‌کند.

در آخر هر مبحث و مقاله، تعدادی تمرین مطابق مثال‌های متن آورده می‌شود که می‌توانید با مراجعه به هر مثال، تمرین نظیر آن را حل کنید.

قواعد تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲، ۵، ۴، ۲۵، ۸ و ۱۲۵

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۲ (یا ۵) برابر با باقی مانده‌ی

تقسیم رقم یکان عدد مفروض بر ۲(یا۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۲ a_۱ a_۰} = ۱۰(\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۲ a_۱}) + a_۰ \overset{(۲\ \text{یا}\ ۵)}{\equiv} ۰ + a_۰ = a_۰$$

واضح است که باقی‌مانده‌ی هر عدد بر ۲ (یا۵)، معادل باقی‌مانده‌ی یکان آن عدد بر ۲(یا۵) است.

۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۴ (یا۲۵) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم دو رقم سمت راست عدد مفروض بر ۴ (یا۲۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۲ a_۱ a_۰} = \overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۲} \times ۱۰۰ + \overline{a_۱ a_۰} \overset{۴\ (\text{یا}\ ۲۵)}{\equiv} ۰ + \overline{a_۱ a_۰} = \overline{a_۱ a_۰}$$

۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۸ (یا۱۲۵) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم سه رقم سمت راست عدد مفروض بر ۸(یا۱۲۵) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۳ a_۲ a_۱ a_۰} = \overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۳} \times ۱۰۰۰ + \overline{a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۸(\text{یا}\ ۱۲۵)}{\equiv} \overline{a_۲ a_۱ a_۰}$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷ را بر ۲، ۵، ۴، ۲۵، ۸ و ۱۲۵ تعیین کنید.

حل: با توجه به قاعده‌ی ۱، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر ۲ و۵ به ترتیب ۱ و۲ می‌شود. با توجه به قاعده‌ی ۲، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر۴ و۲۵ به ترتیب معادل باقی‌مانده‌ی عدد ۸۷ بر ۴ و ۲۵، یعنی ۳ و ۱۲ است.

با توجه به قاعده‌ی ۳، باقی‌مانده‌ی عدد مفروض بر ۸ و ۱۲۵ به ترتیب معادل باقی‌مانده‌ی عدد ۳۸۷ بر ۸ و ۱۲۵، یعنی ۳و۱۲ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۳و۹

۴. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۳ (یا۹) برابر با باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳(یا۹) است؛ زیرا:

$$\overline{a_n a_{n-۱}\cdots a_۱ a_۰} = a_۰ + ۱۰a_۱ + \cdots + ۱۰^n a_n \overset{۳(\text{یا}\ ۹)}{\equiv} a_۰ + a_۱ + \cdots + a_n$$

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض $\overline{۲۰۰n۱۳n۷}$ بر ۳(یا۹)برابر۲ باشد، n را بیابید.

حل: با توجه به قاعده‌ی ۴ کافی است مجموع ارقام عدد مفروض را بر ۳(یا۹) تقسیم و باقی‌مانده را تعیین کنیم.

$$۷ + n + ۳ + ۱ + n + ۰ + ۰ + ۲ \overset{۳(\text{یا}\ ۹)}{\equiv} ۲\ ;\ ۲n + ۱۳ \overset{۳(\text{یا}\ ۹)}{\equiv} ۲\ ;$$

$$۲n \overset{۳(\text{یا}\ ۹)}{\equiv} -۱۱\ ;\ ۲n \overset{۳(\text{یا}\ ۹)}{\equiv} -۹-۲\ ;$$

$$۲n \overset{۳(\text{یا}\ ۹)}{\equiv} -۲\ ;\ n \overset{۳(\text{یا}\ ۹)}{\equiv} -۱$$

در این جا دو حالت را در نظر می‌گیریم:

$$n \overset{۳}{\equiv} -۱\ ;\ n \overset{۳}{\equiv} -۱+۳\ ;\ n \overset{۳}{\equiv} ۲$$

$$n \overset{۹}{\equiv} -۱\ ;\ n \overset{۹}{\equiv} ۹-۱\ ;\ n \overset{۹}{\equiv} ۸$$

بنابراین، عدد مفروض به پیمانه‌ی ۳برابر ۲۰۰۲۱۳۲۷ و به پیمانه‌ی ۹برابر ۲۰۰۸۱۳۸۷ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۲۷ و ۳۷

۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر ۲۷ (یا۳۷) برابر با باقی‌مانده‌ی عددی است که از سمت راست عدد مفروض، سه‌رقم سه‌رقم جدا و باهم جمع کرده‌ایم؛ زیرا با توجه به هم‌نهشتی $(۱۰۰۰)^n \overset{۲۷\ (۳۷)}{\equiv} ۱$ می‌توان نوشت:

$$\overline{a_n a_{n-۱} a_{n-۲}\cdots a_۵ a_۴ a_۳ a_۲ a_۱ a_۰} = \overline{a_۲ a_۱ a_۰} + \overline{a_۵ a_۴ a_۳}(۱۰۰۰) +$$

$$\overline{a_۸ a_۷ a_۶}(۱۰۰۰)^۲ + \overline{a_{۱۱} a_{۱۰} a_۹}(۱۰۰۰)^۳ + \cdots \overset{۲۷(\text{یا}۳۷)}{\equiv} \overline{a_۲ a_۱ a_۰} +$$

$$\overline{a_۵ a_۴ a_۳} + \overline{a_۸ a_۷ a_۶} + \overline{a_{۱۱} a_{۱۰} a_۹} + \cdots = N \overset{۲۷(\text{یا}۳۷)}{\equiv} ?$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۸ را بر ۲۷و۳۷ تعیین کنید.

حل: از سمت راست عدد مفروض را سه‌رقم سه‌رقم جدا و اعداد جدا شده را با هم جمع می‌کنیم:

$$۲۰۰۸۱۳۸۷۸ \overset{۲۷(\text{یا}۳۷)}{\equiv} ۸۷۸ + ۸۱۳ + ۲۰۰ = ۱۸۹۱$$

$$۱۸۹۱ \overset{۲۷}{\equiv} ۸۹۱ + ۱ = ۸۹۲ \overset{۲۷}{\equiv} ۱\ ;\ ۱۸۹۱ \overset{۳۷}{\equiv} ۸۹۱ + ۱ = ۸۹۲ \overset{۳۷}{\equiv} ۴$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض بر ۲۷برابر ۱ و بر ۳۷ برابر ۴ است.

قاعده‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم بر ۷، ۱۱ و۱۳

۶. با توجه به هم‌نهشتی $(۱۰۰۰) \overset{۷(\text{یا}\ ۱۱\ \text{یا}\ ۱۳)}{\equiv} -۱$ و باتوجه به قاعده‌ی ۵ برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد بر ۷(یا۱۱ یا۱۳)،

از سمت راست عدد را سه رقم سه‌رقم جدا و اعداد جدا شده را جمع جبری می‌کنیم. سپس باقی‌مانده‌ی عدد حاصل را بـر ۷(یا ۱۱ یا ۱۳) به دست می‌آوریم.

$$\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = \overline{a_2a_1a_0} + \overline{a_5a_4a_3}(1000) +$$

$$\overset{7(\text{یا } 11 \text{ یا } 13)}{\equiv} \overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_5a_4a_3} + \cdots = N \overset{7(\text{یا } 11 \text{ یا } 13)}{\equiv} ?$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عـدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۸ را بر ۷، ۱۱ و ۱۳ تعیین کنید.

حل: از سمت راست عدد مفروض را سه‌رقم سه‌رقم جدا و اعداد جدا شده را باهم جمع جبری می‌کنیم:

$$200813878 \overset{7(\text{یا } 11 \text{ یا } 13)}{\equiv} 878 - 813 + 200 = 265$$

$$265 \overset{7}{\equiv} 6 \;,\; 265 \overset{11}{\equiv} 1 \;,\; 265 \overset{13}{\equiv} 5$$

تبصره: باقی‌مانده‌ی تقسیـم بـر ۱۱ را به‌صورت ساده‌تری نیـز می‌توان به دست آورد. ($10^n \overset{11}{\equiv} (-1)^n$):

$$\overline{a_n\cdots a_1a_0} = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots + 10^na_n \overset{11}{\equiv} a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^na_n$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 1387^{2008} بر ۱۱ را بیابید.

حل: (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

$$1387^{2008} \overset{11}{\equiv} (7-8+3-1)^{2008} \overset{11}{\equiv} (1)^{2008} = 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۷ بیابید.

$$N = (2003)^{1383}.(3004)^{1384}.(4005)^{1385}.(7006)^{1387}.(8007)^{1387}.(9008)^{1389}$$

حل: باقی‌مانده‌ی هر عامل را بر ۷ تعیین می‌کنیم:

$$(2003)^{1383} \overset{7}{\equiv} (3-2)^{1383} = 1 \;,\; (3004)^{1384} \overset{7}{\equiv} (4-3)^{1384} = 1$$

$$(4005)^{1385} \overset{7}{\equiv} (5-4)^{1385} = 1$$

$$(7006)^{1387} \overset{7}{\equiv} (6-7)^{1387} = -1 \overset{7}{\equiv} 6$$

$$(8007)^{1387} \overset{7}{\equiv} (7-8)^{1387} = -1 \overset{7}{\equiv} 6$$

$$(9008)^{1389} \overset{7}{\equiv} (8-9)^{1389} = -1 \overset{7}{\equiv} 6$$

پس:

$$N \overset{7}{\equiv} (1)(1)(1)(6)(6)(6) = 6^3 \overset{7}{\equiv} (-1)^3 = -1 \overset{7}{\equiv} 6 \text{ (باقی مانده)}$$

مثال: باقی‌مـانـده‌ی تـقـسـیـم $(987654321)^{4008}$ را بـر ۱۳ بیابید.

حل:

$$(987654321)^{4008} \overset{13}{\equiv} (321-654+987)^{4008} \overset{13}{\equiv} (654)^{4008}$$

(باقی مانده)

$$(654)^{4008} \overset{13}{\equiv} 4^{4008} = \left(4^3\right)^{1336} = 64^{1336} \overset{13}{\equiv} (-1)^{1336} = 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۳۷ بیابید.

$$N = (1035)^{2003}.(3003)^{2004}.(1005)^{2004}.(4365)^{2006}.(2004)^{2008}$$

حل: باقی‌مانده‌ی هر عامل را بر ۳۷ تعیین می‌کنیم:

$$(N \overset{37}{\equiv} (-1)(1)(1)(1)(1) = -1 \overset{37}{\equiv} 36)$$

$$(1035)^{2003} \overset{37}{\equiv} (035+1)^{2003} = 36^{2003} \overset{37}{\equiv} (-1)^{2003} = -1 \;,$$

$$(3003)^{2004} \overset{37}{\equiv} (003+3)^{2004} = 6^{2004}$$

$$6^{2004} = 36^{1002} \overset{37}{\equiv} (-1)^{1002} = 1 \;,$$

$$(1005)^{2004} \overset{37}{\equiv} (005+1)^{2004} = 6^{2004} \overset{37}{\equiv} 1$$

$$(4365)^{2006} \overset{37}{\equiv} (365+4)^{2006} = 369^{2006} \overset{37}{\equiv} (-1)^{2006} = 1 \;,$$

$$(2004)^{2008} \overset{37}{\equiv} (004+2)^{2008} = 36^{1004} \overset{37}{\equiv} 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = (1387)^{2008}.(2008)^{1387}$ را بر ۹ بیابید.

حل:

$$(2008)^{1387} \overset{9}{\equiv} (8+0+0+2)^{1387} = 10^{1387} \overset{9}{\equiv} 1$$

$$(1387)^{2008} \overset{9}{\equiv} (7+8+3+1)^{2008} = 19^{2008} \overset{9}{\equiv} 1 \;;\; N \overset{9}{\equiv} 1 \times 1 = 1$$

مثال: باقی‌مانده ی تقسیـم $N = 3^{31} + 3^{32} + 3^{33} + 3^{34}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل:

$$N = 3^{30} \times 3 + 3^{30} \times 3^2 + 3^3(3^{30} + 3 \times 3^{30})$$

$$3^{30} = (3^3)^{10} = (27)^{10} \overset{13}{\equiv} (1)^{10} = 1 \;;\; 3^{30} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$N \overset{13}{\equiv} (1)(3) + (1)(9) + (1)(1 + (3)(1)) = 3 + 9 + 1 + 3 = 16 \overset{13}{\equiv} 3$$

(باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم بر N را بر ۲۵ بیابید.

$$N = 7^2 + 7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}$$

حل: $N = 49 + 7^n(1+7+7^2+7^3) = 49 + 7^n(400)$

$$N = 49 + 7^n(400) \overset{25}{\equiv} 49 + 7^n(16\times 25) \overset{25}{\equiv} 49 \overset{25}{\equiv} -1 \overset{25}{\equiv} 24$$

(باقی مانده)

مثال: اگر x، y و z مضرب ۶ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=(x^3+y^3+z^3+x^3y^3z^3-1)^{1387}$ را بر عدد ۷۲ بیابید.

حل:

$$6|x\ ;\ 2\times 3|x;\ 2^3\times 3^3|x^3;\ 2^3\times 3^2|x^3; 72|x^3;$$

$$x^3\overset{72}{\equiv}0\ ,\ y^3\overset{72}{\equiv}0\ ,\ z^3\overset{72}{\equiv}0\ ,\ \begin{cases} x^3+y^3+z^3\overset{72}{\equiv}0\\ x^3y^3z^3\overset{72}{\equiv}0\end{cases}$$

$$N=(x^3+y^3+z^3+x^3y^3z^3-1)^{1387}\overset{72}{\equiv}(0+0-1)^{1387}$$

$=-1\overset{72}{\equiv}71$ (باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده ی تقسیم $N=1!+2!+3!+\cdots+n!$ را بر عدد ۲۴ بیابید.

حل: با توجه به برابری‌های ۱=!۱، ۲=!۲، ۶=!۳، ۲۴=!۴، ۵(!۴)=!۵ و...

(برای $n\geq 4$ داریم: $n!\overset{24}{\equiv}0$):

$$N=1!+2!+3!+4!+\cdots+n!\overset{24}{\equiv}1+2+6+0+0+\cdots+0=9$$

(باقی مانده)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $2^{9^{25}}$ را بر عدد ۱۵ بیابید.

حل: $9\overset{4}{\equiv}1\ ;\ 9^{25}\overset{4}{\equiv}1\ ;\ 9^{25}-1=4q\ ;\ 9^{25}=4q+1$

$$2^{9^{25}}=2^{4q+1}=(2^4)^q\times 2^1=16^q\times 2\overset{15}{\equiv}(1)^q\times 2=2$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $7^{9^{1387}}$ را بر عدد ۱۲ بیابید.

حل: (۹ به هر توانی برسد، عددی فرد است)

$$9^{1387}\overset{2}{\equiv}1^{1387}=1\ ;\ 9^{1387}=2q+1$$

$$7^{9^{1387}}=7^{2q+1}=(7^2)^q\times 7=(49)^q\times 7\overset{12}{\equiv}(1)^q\times 7=7$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(64\times 65\times 66)^{1387}$ را بر ۱۳ بیابید.

حل: $64\overset{13}{\equiv}-1\ ,\ 65\overset{13}{\equiv}0\ ,\ 66\overset{13}{\equiv}1$

$$N=(64\times 65\times 66)^{1387}\overset{13}{\equiv}((-1)(0)(1))^{1387}=(0)^{1387}=0$$

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۷ برابر ۳ باشد و داشته باشیم:

$$(A\overset{7}{\equiv}3)\qquad B=A^3+3A^2+4A+7$$

باقی‌مانده‌ی B را بر ۷ بیابید.

حل: $B=A^3+3A^2+3A+1+A+6$

$$=(A+1)^3+A+6\overset{7}{\equiv}4^3+3+6$$

$$B\overset{7}{\equiv}73\overset{7}{\equiv}3\ ,\ B\overset{7}{\equiv}3$$

پس A و B هم باقی‌مانده به ۷ هستند.

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۴ و ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۵۶ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} k\overset{7}{\equiv}4\ ;\ 8k\overset{8\times 7}{\equiv}8\times 4\ ;\ 8k\overset{56}{\equiv}32\\ k\overset{8}{\equiv}3\ ;\ 7k\overset{8\times 7}{\equiv}7\times 3\ ;\ 7k\overset{56}{\equiv}21\end{cases}$$

$$8k-7k\overset{56}{\equiv}32-21\ ;\ k\overset{56}{\equiv}11\Rightarrow r=11$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 7^{1387} را بر عدد ۱۹ بیابید.

حل: $7^{1387}=(7^3)^{462}\times 7=343^{462}\times 7\overset{19}{\equiv}(1)^{462}\times 7=7$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 11^{1387} را بر عدد ۶۱ بیابید.

حل:

$$11^{1387}=(11^2)^{693}\times 11=(121)^{693}\times 11\overset{61}{\equiv}(-1)^{693}\times 11$$

$$=-11\overset{61}{\equiv}50$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=(13^{75}+19^{57})^4$ را بر ۱۷ بیابید.

حل:

$$k=13^{75}+19^{57}\overset{17}{\equiv}(-4)^{75}+2^{57}=(-4)(-4)^{74}+(2^4)^{14}(2)$$

$$k=(-4)(16)^{37}+(16)^{14}(2)\overset{17}{\equiv}(-4)(-1)^{37}$$

$$+(-1)^{14}(2)\overset{17}{\equiv}4+2=6$$

$$N\overset{17}{\equiv}k^4\overset{17}{\equiv}6^4=1296\overset{17}{\equiv}4\ ;\ N\overset{17}{\equiv}4$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم 6^{1387} را بر عدد ۴۸ (یا ۵۴) بیابید.

حل:

$$\begin{cases}6=2\times 3\\ 48=3\times 2^4\\ 54=2\times 3^3\end{cases} ; \quad \begin{cases}6^4=2^4\times 3^4\\ 48=2^4\times 3\end{cases} ; \ 48 \mid 6^4 \ ; \ 6^4 \overset{48}{\equiv} 0$$

$$\begin{cases}54=2\times 3^3\\ 6^3=2^3\times 3^3\end{cases} ; \ 54 \mid 6^3 \ ; \ 6^3 \overset{54}{\equiv} 0$$

پس:

$$6^4\times 6^{1383} \overset{48}{\equiv} 0 \ ; \ 6^{1387} \overset{48}{\equiv} 0 \ , \ 6^3\times 6^{1384} \overset{54}{\equiv} 0 \ ; \ 6^{1387} \overset{54}{\equiv} 0$$

توجه: باقی‌ماندهٔ عدد مفروض در تقسیم بر ۴۸ (یا ۵۴) برابر صفر است (اگر $a^n \overset{m}{\equiv} 0 \ , \ k>n$ ، آن‌گاه $a^k \overset{m}{\equiv} 0$).

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $N=(1+2+3+\cdots+1382)^{1382}$ را بر ۱۳۸۲ بیابید.

حل: با توجه به این‌که ۱۳۸۲ بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ می‌دهد:

$$(1+2+3+\cdots+1382)^{1382} \overset{1382}{\equiv} \frac{1382}{2}=691$$

مثال: باقی‌ماندهٔ $7a$ بر ۴۳ برابر ۶ است، باقی‌ماندهٔ $3a^4$ را بر ۴۳ بیابید.

حل:

$$7a \overset{43}{\equiv} 6 \ ; \ 7a \overset{43}{\equiv} 6+43 \ ; \ 7a \overset{43}{\equiv} 49 \ ; \ a \overset{43}{\equiv} 7$$

$$a^4 \overset{43}{\equiv} 7^4 \ ; \ 3a^4 \overset{43}{\equiv} 3\times 49\times 49 \overset{43}{\equiv} 3\times 6\times 6=108 \overset{43}{\equiv} 22$$

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم 3^{4439} را بر ۷۳ بیابید.

حل:

$$3^6=729 \overset{73}{\equiv} -1 \ ; \ (3^6)^{740} \overset{73}{\equiv} (-1)^{740}=1 \ ; \ 3^{4440} \overset{73}{\equiv} 1 \ ;$$

$$3^{4440} \overset{73}{\equiv} 1-73=-72 \ ; \ (3,73)=1$$

(دو طرف هم‌نهشتی را به ۳ ساده می‌کنیم)

$$3^{4439} \overset{73}{\equiv} -24 \ ; \ 3^{4439} \overset{73}{\equiv} -24+73=49$$

توجه: در این دو مثال، از قاعدهٔ زیر استفاده شد:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \ ; \ a \overset{\frac{m}{(m,c)}}{\equiv} b \ , \ \begin{cases}ac \overset{m}{\equiv} bc\\ (m,c)=1\end{cases} ; \ a \overset{m}{\equiv} b$$

مثال: از هم‌نهشتی زیر نتیجه بگیرید که y مضرب ۳ است:

$$(1+2+3+\cdots+1386)x \overset{4161}{\equiv} (1+2+3+\cdots+1387)y$$

حل: با توجه به برابری $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{1386\times 1387}{2}x \overset{3\times 1387}{\equiv} \frac{1387\times 1388}{2}y \ ; \ 693x \overset{3}{\equiv} 694y$$

$$(693 \overset{3}{\equiv} 0) \quad 693x \overset{3}{\equiv} (693+1)y \ ; \ y \overset{3}{\equiv} 0 \ ; \ y=3k$$

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد N را بر عدد ۴ تعیین کنید (با فرض این‌که $n \geq 100$):

$$N=(87-n)^{1387}+(86-n)^{1387}+(85-n)^{1387}+(84-n)^{1387}$$

حل: باتوجه به این نکته که k عدد متوالی در تقسیم بر k، به تعداد k باقی‌ماندهٔ متمایز به صورت $(0,1,2,3,\cdots,(k-1))$ را خواهند داد (البته نه صرفاً با همین ترتیب)، خواهیم داشت:

$$N=(87-n)^{1387}+(86-n)^{1387}+(85-n)^{1387}$$
$$+(84-n)^{1387} \overset{4}{\equiv} (0)^{1387}+(1)^{1387}+(2)^{1387}+(3)^{1387}$$
$$N \overset{4}{\equiv} 1+2^{1387}+(-1)^{1387}=1+2^{1387}-1=2^{1387}$$
$$=2^2\times 2^{1385}=4\times 2^{1385} \overset{4}{\equiv} 0$$

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد M را بر عدد ۶ تعیین کنید:

$$M=(m+1381)^3+(m+1382)^3+\cdots+(m+1386)^3$$

حل: از تقسیم k عدد متوالی بر k، k باقی‌ماندهٔ متمایز $(0,1,2,\cdots,k-1)$ حاصل می‌شود. بنابراین، از تقسیم ۶ عدد متوالی سمت راست بر ۶، باقی‌مانده‌ها حاصل می‌شوند؛ پس:

$$M \overset{6}{\equiv} (0)^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+(4)^3+(5)^3$$
$$=\left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2=225 \overset{6}{\equiv} 3$$

مثال: باقی‌ماندهٔ تقسیم $N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387}$ را بر ۱۲ بیابید.

حل:

$$N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387} \overset{3}{\equiv} (0)^{1387}$$
$$+(1)^{1387}+(-1)^{1387}+(0)^{1387}=0$$
$$N=3^{1387}+4^{1387}+5^{1387}+6^{1387} \overset{4}{\equiv} (-1)^{1387}+(0)^{1387}$$
$$+(1)^{1387}+(0)^{1387}=0$$

با توجه به ۱=(۳ , ۴) و $N\overset{۳}{\equiv}۰$, $N\overset{۴}{\equiv}۰$ ، خواهیم داشت :

$$N = ۳^{۱۳۸۷} + ۴^{۱۳۸۷} + ۵^{۱۳۸۷} + ۶^{۱۳۸۷} \overset{۱۲}{\equiv} ۰$$

پس N بر ۱۲ بخش‌پذیر است؛ زیرا : $N\overset{۱۲}{\equiv}۰$.

تمرین

۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را بر ۳ ، ۵ ، ۴ ، ۲۵ ، ۸و۱۲۵ بیابید (بدون عمل تقسیم) .

۲ . اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد مفروض $\overline{۱۳nV۲۰۰n}$ بر ۳(یا۹) برابر ۲ باشد، n را بیابید .

۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۳۸۷۲۰۰۸ را بر ۲۷ و ۳۷ بیابید (بدون عمل تقسیم) .

۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰۸۱۳۸۷۱۳۸۷ را بر ۷ ، ۱۱و۱۳ بیابید (بدون عمل تقسیم) .

۵ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $۲۰۰۸^{۱۳۸۷}$ را بر ۱۱ بیابید .

۶ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۷ بیابید .

$$N = (۳۰۰۲)^{۱۳۸۲}(۴۰۰۳)^{۱۳۸۳}(۵۰۰۴)^{۱۳۸۴}(۶۰۰۵)^{۱۳۸۵}(۷۰۰۶)^{۱۳۸۶}(۸۰۰۷)^{۱۳۸۷}$$

۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $(۱۲۳۴۵۶۷۸۹۹۹۹)^{۲۰}$ را بر ۱۳ بیابید .

۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۳۷ بیابید .

$$M = (۲۰۰۴)^{۱۳۸۷}(۴۳۶۵)^{۱۳۸۸}(۱۰۰۵)^{۱۳۸۹}(۳۰۰۳)^{۱۳۹۰}(۱۰۳۵)^{۱۳۹۱}$$

۹ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $N = (۲۰۰۸)^{۲۰۰۸}.(۱۳۸۷)^{۱۳۸۷}$ را بر ۹ بیابید .

۱۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $M = (۳^{۳۲} + ۳^{۳۳} + ۳^{۳۴})^{۱۳۸۸}$ را بر ۱۳ بیابید .

۱۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم Nرا بر ۲۵ بیابید .

$$N = (V^{۸} + V^{n+۳} + V^{n+۲} + V^{n+۱} + V^{n})^{۲۰۰۹}$$

۱۲ . اگر x ، y وz مضرب ۶ باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $M = (x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} + x^{۳}y^{۳}z^{۳} - ۶۶۶۵)^{۲۰۰۹}$ را بر عدد ۷۲ بیابید .

۱۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = (۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ... + n^{۳})^{n}$ را بر n بیابید .

۱۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M = (۱! + ۲! + ۳! + ... + n! + ۲۳۰)^{۱۳۸۸}$ را بر ۲۴ بیابید.

۱۵ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = ۲^{۹^{۲۰۰۹}} + ۲^{۹^{۱۳۸۹}}$ را بر ۱۵ بیابید .

۱۶ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M = V^{۹^{۲۰۰۹}} + ۱۷۲۸^{۲۰۰۹^{۱۳۸۸}}$ را بر ۱۲ بیابید .

۱۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = (۴۱۶۰)^{۱۳۸۷} + (۴۲۲۴)^{۱۳۸۸} + (۴۲۹۰)^{۱۳۸۹}$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۷برابر ۵ است . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد B را بر ۷ بیابید .

$$B = (A^{۳} + ۳A^{۲} + ۴A + ۱۲)^{۴}$$

۱۹ . اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۷و۸ به ترتیب ۵و۶ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم k بر ۵۶ را بیابید .

۲۰ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $V^{۲۰۰۸}$ را بر ۱۹ بیابید .

۲۱ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $۱۱^{۲۰۰۹}$ را بر ۶۱ بیابید .

۲۲ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M = (۱۳^{۸۷} + ۱۹^{۸۹})^{۲۰۰۸}$ را بر ۱۷ بیابید .

۲۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $۶^{۲۰۰۹}$ را بر عدد ۴۸ (یا۵۴) بیابید .

۲۴ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = (۱^{۳} + ۲^{۳} + ... + ۱۳۸۲^{۳})^{۱۳۸۲}$ را بر ۱۳۸۲ بیابید .

۲۵ . باقی‌مانده‌ی تقسیم $M = ۳^{۱۳۸۸} + ۳^{۲۰۰۹}$ را بر ۷۳ بیابید .

۲۶ . از هم‌نهشتی زیر نتیجه بگیرید که y مضربی از ۳ است :

$$(۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ... + ۱۳۸۶)^{۳}x \overset{۳(۱۳۸۷)^{۲}}{\equiv} (۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + ... + ۱۳۸۷^{۳})y$$

۲۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر عدد ۶ بیابید .

$$N = (m + ۲۰۰۴)^{۳} + (m + ۲۰۰۵)^{۳} + ... + (m + ۲۰۰۹)^{۳}$$

۲۸ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $M = ۳^{۲۰۰۹} + ۴^{۲۰۰۹} + ۵^{۲۰۰۹} + ۶^{۲۰۰۹}$ را بر ۱۲ بیابید .