جمع چیست؟

● میر شهرام صدر

اشاره

از هر کسی سؤال کنید: حاصل ۳+۲ چند می‌شود، بلافاصله می‌گوید: ۵. اگر دوباره از همان شخص بپرسید: آیا می‌توان به جای عمل جمع، بین دو عدد ۲ و ۳ عمل دیگری انجام داد و در این صورت، حاصل چه می‌شود، با کمی تأمل پاسخ می‌دهد، به جای عمل جمع، می‌توان عمل ضرب را بین دو عدد قرار داد و آن را به صورت ۳×۲ نوشت که حاصل آن برابر با ۶ می‌شود.

اگر این سؤال را دوباره تکرار کنید، ممکن است بگویند، عمل‌های تفریق و تقسیم را هم می‌توان بین این دو عدد انجام داد. درنتیجه خواهیم داشت:

$$۲-۳=-۱$$

$$۲\div ۳=\frac{۲}{۳}$$

حال اگر همان سؤال قبلی را دوباره تکرار کنیم که: آیا می‌توان بین ۲ و ۳ عمل دیگری را انجام داد؟ ناگهان طرف مقابل پاسخ خواهد داد که: «**ما فقط چهار عمل اصلی را روی اعداد به کار می‌بریم و عمل دیگری را نمی‌شناسیم!**»

حق با اوست. در این مقاله سعی خواهیم کرد که مفهوم عمل بین دو عدد (یا دو عضو یک مجموعه) را بیان کنیم. سپس به غیر از چهار عمل اصلی، عمل‌های دیگری را بین دو عضو یک مجموعه تعریف می‌کنیم تا شما نیز بتوانید، خودتان عملیات دیگری را بین اعضای یک مجموعه تعریف کنید.

قبل از این‌که وارد بحث اصلی شویم، سؤالی دیگر را مطرح می‌کنیم که انگیزه‌ی اصلی از نگارش این مقاله است. معمولاً وقتی این سؤال را در کلاس درس از دانش‌آموزان می‌پرسیم، نسبت به آن اظهار بی‌اطلاعی می‌کنند. قبل از پاسخ به این سؤال، ابتدا باید چند مفهوم را برایشان شرح دهیم تا دید دانش‌آموزان نسبت به عمل بین دو عضو یک مجموعه، باز شود. حال این شما و این هم سؤال!

جمع یعنی چه؟

یعنی این عمل جمع که بین ۲ و ۳ انجام دادیم و گفتیم حاصل آن ۵ می‌شود. چه معنی دارد؟ برای پاسخ گویی به این سؤال، ابتدا مفهوم تابع را بیان می‌کنیم.

مفهوم تابع

تکامل مفهوم تابع حدود دو قرن به طول انجامید. **دیریکله**، ریاضی‌دان آلمانی (۱۸۵۹-۱۸۰۵ م) در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به صورتی روشن بیان کرد و گفت: «y تابعی از متغیر x در بازه‌ی $a < x < b$ است؛ به شرطی که هر مقدار x از این بازه، با مقدار معین و مشخص از y متناظر باشد؛ البته این تناظر می‌تواند به هر ترتیب دل‌خواهی باشد.»

پیش از این تعریف، برای نخستین بار، مقدار متغیر (تابع) در قرن هفدهم و در نوشته‌های هندسی **فرما** (۱۶۵۵-۱۶۰۱ م) و **دکارت**، ریاضی‌دان فرانسوی، مطرح شد.

برای مثال، دکارت در کتاب هندسه‌ی خود، مفهوم تابع را به عنوان «تغییر عرض درنتیجه‌ی تغییر طول» بررسی می‌کند.

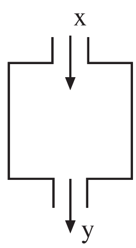
در قرن هجدهم، **یوهان برنولی** (۱۷۴۸–۱۶۶۷ م) دیدگاه جدیدی را نسبت به تابع مطرح می‌کند. او می‌گوید: «تابع دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر درنظر می‌گیرد.»

در سال ۱۷۴۸، **لئوناردا ویلر**، شاگرد **یوهان برنولی**، نماد f (Function) را برای تابع درنظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح کرد:

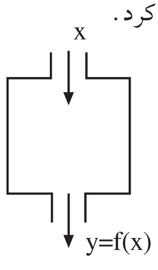
«تابع یک متغیر عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.»

همان‌طور که ملاحظه کردید، تعریف تابع به صورت امروزی بین ریاضی‌دانان رایج نبود، بلکه همه‌ی آنان تصویر ذهنی مشترکی از این مفهوم داشتند. بهتر است برای بیان مفهوم تابع، از آن تصور ذهنی استفاده کنیم و مانند آن‌ها با مفهوم تابع درگیر شویم.

این تصور چنین بود که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند؛ به طوری که یک x را از ورودی می‌گیرد و تنها یک مقدار y از خروجی بیرون می‌دهد. پس می‌توان ابتدا از مدل زیر برای بیان مفهوم تابع استفاده کرد:



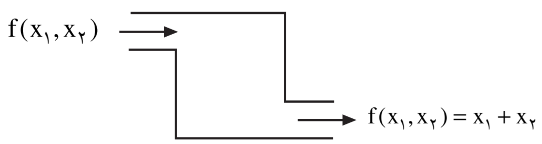
چون ماشین f عملی را روی x انجام می‌دهد، می‌توان عمل انجام‌شده روی x را با f(x) نمایش داد. بنابراین می‌توان در خروجی به جای y از نماد f(x) استفاده کرد.



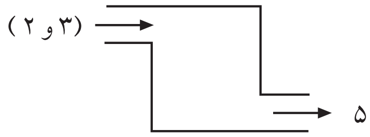
اکنون به این سؤال پاسخ می‌دهیم که جمع یعنی چه؟

تابعی مانند ماشین زیر را درنظر بگیرید؛ به طوری که از ورودی آن دو عدد x_1 و x_2 وارد ماشین می‌شوند. سپس ماشین عملی به نام جمع را روی x_1 و x_2 انجام می‌دهد. عمل انجام شده روی x_1 و x_2 را با نماد $f(x_1, x_2)$ یا $+(x_1, x_2)$ نمایش می‌دهیم.

از خروجی ماشین عددی بیرون می‌آید که حاصل جمع $x_1 + x_2$ است.



برای مثال، اگر دو عدد ۲ و ۳ را وارد ماشین کنیم، در خروجی عدد ۵ را ملاحظه خواهیم کرد.

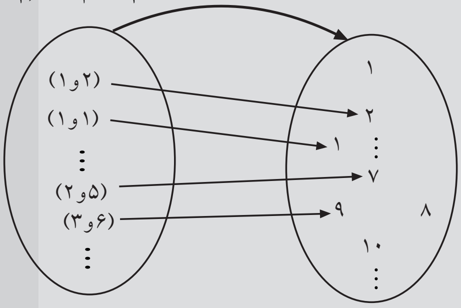


$$f(2,3) = +(2,3) = 2 + 3 = 5$$

این ماشین را تابع جمع یا ماشین جمع می‌نامیم.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را درنظر بگیرید. اگر هر دو عدد طبیعی x_1 و x_2 وارد ماشین جمع شوند، آن‌گاه از خروجی یک عدد طبیعی بیرون می‌آید که برابر با $x_1 + x_2$ است. درنتیجه، عمل جمع روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک تابع است. یعنی برای هر $(x_1 x_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$، یک عدد طبیعی به صورت $(x_1 + x_2) \in \mathbb{N}$ وجود دارد که متناظر با آن است. بنابراین، تابع جمع را روی $\mathbb{N}$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} +: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ +(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \end{cases}$$



$$f(1,1) = +(1,1) = 1 + 1 = 2$$
$$f(1,2) = +(1,2) = 1 + 2 = 3$$
$$\vdots$$
$$f(2,5) = +(2,5) = 2 + 5 = 7$$
$$f(3,6) = +(3,6) = 3 + 6 = 9$$
$$\vdots$$

به طور کلی، تابع جمع را روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی می‌نامیم. عمل دوتایی در مجموعه‌ی A، به ازای هر زوج مرتب از مجموعه‌ی $A \times A$، طبق دستور (ضابطه‌ی تابع) عضوی منحصر به فرد از A را مشخص می‌کند.

عمل دوتایی

تعریف: هر تابع $f: A \times A \to A$ را یک عمل دوتایی روی A می‌گوییم. یعنی عمل دوتایی f روی A، به هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$، عضو منحصربه‌فرد $z = f(x, y)$ از A را نسبت می‌دهد.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{-1, 0, 1\}$ را درنظر بگیرید:

الف) آیا عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟

ب) آیا عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی است؟

حل :

الف) ابتدا $A \times A$ را تشکیل می‌دهیم :

$$A \times A = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$$

$$= \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1)\}$$

اکنون عمل ضرب معمولی را روی هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$ اعمال می‌کنیم. بنابراین داریم :

$$\times(-1,-1) = (-1) \times (-1) = 1 \in A$$

$$\times(-1,0) = (-1) \times 0 = 0 \in A$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\times(1,1) = 1 \times 1 = 1 \in A$$

ملاحظه می‌کنیم که برای هر (x,y) از $A \times A$، داریم :

$$\times(x,y) = x \times y = z \in A$$

در نتیجه، عمل ضرب معمولی روی A یک عمل دوتایی است، یا مجموعه‌ی A نسبت به عمل ضرب معمولی بسته است.

تذکر : اگر عملی روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی A نسبت به آن عمل دوتایی بسته است.

ب) برای این منظور، عمل جمع معمولی را روی هر زوج مرتب (x,y) از $A \times A$ اعمال می‌کنیم :

$$+(-1,-1) = (-1) + (-1) = -2 \notin A$$

چون به یک مثال نقض رسیدیم، پس عمل جمع معمولی روی A یک عمل دوتایی نیست. به عبارت دیگر، مجموعه‌ی A نسبت به عمل جمع بسته نیست.

خلاصه

برای این‌که نشان دهیم، تابع f روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی است، مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

مرحله‌ی اول : مجموعه‌ی $A \times A$ را تشکیل می‌دهیم.

مرحله‌ی دوم : تابع f را روی هر زوج مرتب $(x,y) \in A \times A$ اعمال می‌کنیم. در صورتی که همواره حاصل $z = f(x,y)$ عضوی از A باشد، آن‌گاه f روی A یک عمل دوتایی است.

تذکر : اگر حتی یک مثال نقض پیدا شود که $z = f(x,y)$ عضوی از A نباشد، آن‌گاه f روی A یک عمل دوتایی نیست.

مثال : آیا عمل تفریق و عمل تقسیم روی مجموعه‌ی اعداد صحیح یک عمل دوتایی است؟

عمل تفریق روی Z یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x,y) \in Z \times Z$ داریم :

$$f(x,y) = -(x,y) = x - y \in Z$$

اما عمل تقسیم روی Z یک عمل دوتایی نیست، زیرا : $(2,3) \in Z \times Z$ ؛ در حالی که :

$$f(2,3) = \div(2,3) = \frac{2}{3} \notin Z$$

همان‌طور که گفتیم ذکر یک مثال نقض برای رد کردن دوتایی بودن عمل تقسیم کافی است.

سؤال : به نظر شما عمل تقسیم روی چه مجموعه‌ای عمل دوتایی است؟

فعالیت ۱. مجموعه‌ی $A = \{1,2,3\}$ را درنظر بگیرید. یک عمل روی A تعریف کنید.

مرحله‌ی اول : مجموعه‌ی $A \times A$ را تشکیل دهید.

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), \cdots, (3,3)\}$$

مرحله‌ی دوم : تابعی از $A \times A$ در A تعریف کنید؛ برای مثال :

$$(1,1) \xrightarrow{f} 1$$

$$(1,2) \xrightarrow{f} 1$$

$$(1,3) \xrightarrow{f} 1$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(3,2) \xrightarrow{f} 3$$

$$(3,3) \xrightarrow{f} 3$$

ضابطه‌ی این تابع را می‌توان به صورت $f(x,y) = x$ درنظر گرفت. درنتیجه، تابع با ضابطه‌ی $f(x,y) = x$ یک عمل دوتایی روی A است.

سؤال : آیا شما می‌توانید عمل‌های دوتایی دیگری را روی A تعریف کنید؟

دیدیم که عمل‌های جمع معمولی و ضرب معمولی روی $\mathbb{N}$ عمل‌های دوتایی هستند. اعمال دوتایی دیگری را می‌توان روی $\mathbb{N}$ تعریف کرد که معمولاً آن‌ها را با علامت‌های $*$، $\circ$، $\oplus$، $\otimes$ و نظایر آن نمایش می‌دهیم. در این صورت به جای $f(x,y)$ می‌توان $*(x,y)$ یا $x*y$ را نوشت.

برای مثال عمل $x*y = 2x + y + 1$ روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است، زیرا برای هر زوج مرتب $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$، وقتی عمل $*$ روی (x,y) اثر می‌کند، حاصل آن یعنی $2x + y + 1$ یک عدد طبیعی است.

اما عمل $x \oplus y = x - y + 1$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست؛ زیرا برای زوج مرتب $(2,3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ طبق عمل $\oplus$ می‌توان نوشت :

$$\oplus(2,3) = 2 \oplus 3 = 2 - 3 + 1 = 0 \notin \mathbb{N}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $(2,3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$، اما : $\oplus(2,3) \notin \mathbb{N}$. پس عمل $\oplus$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست یا مجموعه‌ی اعداد طبیعی نسبت به عمل $\oplus$ بسته نیست.

مثال : عمل $*$ را روی مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\begin{cases} *: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ *(x,y) = [x,y] \end{cases}$$

منظور از $[x,y]$ همان ک. م. م دو عدد y و x است. آیا $*$

روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است؟

حل: بله، زیرا برای هر $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ داریم:

$$*(x,y)=[x,y]\in\mathbb{N}$$

برای مثال می‌توان نوشت:

$$*(15,6)=30\in\mathbb{N}$$
$$*(2,3)=6\in\mathbb{N}$$
$$*(a,a)=a\in\mathbb{N}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد گنگ نسبت به عمل جمع و ضرب معمولی بسته نیست، زیرا برای مثال:

$$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})\cup Q^c\times Q^c$$

این در حالی است که:

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2\notin Q^c$$
$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1\notin Q^c$$

فعالیت ۲. آیا جمع و ضرب معمولی روی هر یک از مجموعه‌های Z، Q و $\mathbb{R}$ عمل‌های دوتایی هستند؟

مثال: فرض کنیم: $A=\{1,2\}$. آیا دو عمل اجتماع و اشتراک روی مجموعه‌ی توانی A (مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های A که آن را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم)، عمل‌های دوتایی هستند؟

حل: واضح است که:

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

مرحله‌ی اول: $P(A)\times P(A)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}P(A)\times P(A)=\{&(\varnothing,\varnothing),(\varnothing,\{1\}),(\varnothing,\{2\}),(\varnothing,\{1,2\})\\&(\{1\},\varnothing),(\{1\},\{1\}),(\{1\},\{2\}),(\{1\},\{1,2\})\\&(\{2\},\varnothing),(\{2\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\})\\&(\{1,2\},\varnothing),(\{1,2\},\{1\}),(\{1,2\},\{2\}),(\{1,2\},\{1,2\})\}\end{aligned}$$

مرحله‌ی دوم: اکنون اگر هریک از عمل‌های اجتماع یا اشتراک را در هریک از زوج‌های مرتب مجموعه‌ی $P(A)\times P(A)$ اعمال کنیم، ملاحظه خواهید کرد که حاصل آن در مجموعه‌ی $P(A)$ قرار دارد. بنابراین مجموعه‌ی $P(A)$ نسبت به عمل‌های اشتراک و اجتماع بسته است.

برای مثال:

$$\cup(\{1\},\{2\})=\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}\in P(A)$$
$$\cup(\varnothing,\{1\})=\varnothing\cup\{1\}=\{1\}\in P(A)$$
$$\cap(\{2\},\{1,2\})=\{2\}\cap\{1,2\}=\{2\}\in P(A)$$
$$\cap(\{1\},\{2\})=\{1\}\cap\{2\}=\varnothing\in P(A)$$

فعالیت ۳: عمل‌های اجتماع و اشتراک را روی بقیه‌ی زوج‌های مرتب مجموعه‌ی $P(A)\times P(A)$ اعمال کنید.

نکته: فرض کنیم A مجموعه‌ی ناتهی و $P(A)$ مجموعه‌ی توانی A باشد. در این صورت، عمل‌های اجتماع و اشتراک روی $P(A)$ عمل‌هایی دوتایی هستند.

مثال: در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه‌ی مفروض دوتایی است یا خیر؟

الف) $S=Z;\ a\oplus b=a+b^2$

ب) $S=Z;\ aOb=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}$

ج) $S=\{1,-2,3,2,-4\};\ a\otimes b=|b|$

حل:

الف)
$$\begin{cases}\oplus:\ Z\times Z\to Z\\ \oplus\ (a,b)=a+b^2\end{cases}$$

برای هر $(a,b)\in Z\times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$\oplus\ (a,b)=a\oplus b=(\underbrace{a}_{\in Z}+\underbrace{b^2}_{\in Z})\in Z$$

درنتیجه عمل $\oplus$ روی Z دوتایی است.

ب)
$$\begin{cases}O:\ Z\times Z\to Z\\ O\ (a,b)=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\end{cases}$$

برای هر $(-3,5)\in Z\times Z$ ملاحظه خواهیم کرد:

$$O\ (-3,5)=-3O5=\frac{(-3)^2+2(-3)(5)+5^2}{-3-5}$$
$$=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}\notin Z$$

بنابراین، عمل O روی Z دوتایی نیست.

ج)
$$\begin{cases}*:\ S\times S\to S\\ *\ (a,b)=|b|\end{cases}$$

برای $(2,-4)\in S\times S$، داریم:

$$*(2,-4)=2*(-4)=|-4|$$
$$=4\notin S$$

لذا عمل $*$ روی S دوتایی نیست.

فعالیت ۴. فرض کنیم $M_{2\times2}$ مجموعه‌ی ماتریس‌های مربعی 2×2 با درایه‌های حقیقی باشند. بررسی کنید آیا عمل‌های جمع و ضرب ماتریس‌ها روی $M_{2\times2}$ عمل‌های دوتایی هستند یا خیر؟

راهنمایی:

$$M_{2\times2}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\middle|\, a,b,c,d\in R\right\}$$

نشان دهید:

$$\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{bmatrix}\right)\in M_{2\times2}$$

$$\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{bmatrix}\right)\in M_{2\times2}$$

تا این‌جا متوجه شدیم که به جز چهار عمل اصلی روی اعداد، می‌توان عمل‌های دوتایی دیگری را تعریف کرد. اکنون لازم می‌دانیم شما را با مفهومی دیگر آشنا کنیم. می‌دانید که عدد صفر عضو بی‌اثر عمل جمع اعداد است؛ یعنی: $a+0=0+a=a$.

هم‌چنین واضح است که عدد ۱ عضو بی‌اثر عمل ضرب معمولی اعداد است؛ به‌طوری که: $a\times 1=1\times a=a$.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}\oplus Z\times Z\to Z\\ \oplus(a,b)=a+b-1\end{cases}$$

برای این منظور، عضو بی‌اثر یک عمل دوتایی را روی مجموعه‌ی مفروض A به صورت زیر بیان می‌کنیم.

عضو بی‌اثر

فرض کنیم که $*$ روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی باشد. اگر برای هر $a\in A$ ، عضو منحصر به فردی مانند $e\in A$ موجود باشد، به‌طوری که:

$$a*e=e*a=a$$

در این صورت e را عضو بی‌اثر عمل دوتایی $*$ روی مجموعه‌ی A می‌گوییم.

قضیه: عمل دوتایی $*$ را روی مجموعه‌ی A در نظر بگیرید. ثابت کنید عضو بی‌اثر این عمل دوتایی منحصربه‌فرد است.

اثبات (برهان خلف): فرض کنیم e_1 و e_2 هر دو عضو بی‌اثر عمل $*$ روی مجموعه‌ی A باشند (فرض خلف). در این صورت چون e_1 عضو بی‌اثر عمل $*$ است، داریم:

$$e_2*e_1=e_1*e_2=e_2 \qquad (1)$$

از طرفی e_2 هم عضو بی‌اثر عمل $*$ است. پس داریم:

$$e_1*e_2=e_2*e_1=e_1 \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که: $e_1=e_2$. درنتیجه، فرض خلف باطل و عضو بی‌اثر عمل $*$ روی A منحصربه‌فرد است.

مثال: عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}\oplus Z\times Z\to Z\\ \oplus(a,b)=a+b-1\end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e\in Z$ عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$\oplus(a,e)=\oplus(e,a)=a$$

$$\oplus(a,e)=a\Rightarrow a\oplus e=a$$

$$\Rightarrow a+e-1=a\Rightarrow e=1\in Z \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

(۲)

$$\oplus(e,a)=a\Rightarrow e\oplus a=a\Rightarrow e+a-1=a\Rightarrow e=1\in Z$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم که $e=1$ منحصربه‌فرد است. پس e عضو بی‌اثر این عمل دوتایی روی Z است. برای مثال ملاحظه می‌کنیم:

$$4\oplus 1=4+1-1=4\Rightarrow 4\oplus 1=4$$

$$-7\oplus 1=-7+1-1=-7\Rightarrow -7\oplus 1=-7$$

مثال: آیا عمل تقسیم روی مجموعه‌ی اعداد Q^+ عضو بی‌اثر دارد؟

حل: اگر $e\in Q^+$ عضو بی‌اثر عمل تقسیم روی Q^+ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\div(a,e)=\div(e,a)=a$$

$$\div(a,e)=a\Rightarrow a\div e=a\Rightarrow \frac{a}{e}=a\Rightarrow e=1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\div(e,a)=a\Rightarrow e\div a=a\Rightarrow \frac{e}{a}=a\Rightarrow e=a^2 \qquad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم که عضو بی‌اثر منحصربه‌فرد نیست، پس عمل تقسیم روی Q^+ عضو بی‌اثر ندارد.

مثال: عضو بی‌اثر عمل دوتایی زیر چیست؟

$$\begin{cases}*Q^+\times Q^+\to Q^+\\ *(a,b)=\dfrac{ab}{2}\end{cases}$$

حل: فرض کنیم $e\in Q^+$ عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a,e)=*(e,a)=a$$

$$*(a,e)=a\Rightarrow \frac{ae}{2}=a\Rightarrow e=2 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$*(e,a)=a\Rightarrow \frac{ea}{2}=a\Rightarrow e=2 \qquad (2)$$

با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $e=2$ منحصربه‌فرد و عضو بی‌اثر عمل $*$ روی Q^+ است.

مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}*:(Z-\{1\})\times(Z-\{1\})\to(Z-\{1\})\\ *(m,n)=m+n-mn\end{cases}$$

الف) عضو بی‌اثر این عمل را بیابید.

ب) معادله‌ی $2*(3*x)=5$ را حل کنید.

حل:

الف) فرض کنیم $e\in(Z-\{1\})$ ، عضو بی‌اثر این عمل دوتایی باشد. بنابراین داریم:

$$*(a,e)=*(e,a)=a$$

$$*(a,e)=a\Rightarrow a*e=a$$

$$\Rightarrow a+e-ae=a$$

$$\Rightarrow e(1-a)=0\xrightarrow{a\neq 1}e=0 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$*(e,a)=a\Rightarrow e*a=a$$

$$\Rightarrow e+a-ea=a\Rightarrow e=0 \qquad (2)$$

از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم که $e=0$ منحصربه‌فرد است. پس عضو بی‌اثر این عمل دوتایی است.

ب)
$$۲*(۳*x)=۵$$
$$\Rightarrow ۲*(۳+x-۳x)=۵ \Rightarrow ۲*(۳-۲x)=۵$$
$$\Rightarrow ۲+(۳-۲x)-۲(۳-۲x)=۵$$
$$\Rightarrow ۵-۲x-۶+۴x=۵ \Rightarrow x=۳$$

فعالیت ۵. آیا عمل تفاضل (تفریق) روی مجموعه‌ی Z دارای عضو بی‌اثر است؟

فعالیت ۶. عضو بی‌اثر هر یک از عمل‌های دوتایی زیر را روی مجموعه‌ی مفروض بیابید.

الف) مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ $(M_{۲\times۲})$ با عمل دوتایی جمع ماتریس‌ها.

راهنمایی: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{bmatrix}$، در صورتی که $E=\begin{bmatrix} e_۱ & e_۲ \\ e_۳ & e_۴ \end{bmatrix}$ عضو بی‌اثر عمل جمع ماتریس‌ها باشد، داریم:
$$A+E=E+A=A$$

ب) مجموعه‌ی ماتریس‌های ۲×۲ با عمل دوتایی ضرب ماتریس‌ها.

راهنمایی: از رابطه‌ی زیر ماتریس E را پیدا کنید.
$$\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} e_۱ & e_۲ \\ e_۳ & e_۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_۱ & a_۲ \\ a_۳ & a_۴ \end{bmatrix}$$

ج) هرگاه A یک مجموعه باشد، مجموعه‌ی توانی A با عمل اشتراک.

راهنمایی: اگر $E\in P(A)$ عضو بی‌اثر عمل اشتراک باشد، برای هر $B\in P(A)$، باید داشته باشیم: $B\cap E=E\cap B=B$.

اجازه بدهید در این قسمت شما را با مفهومی دیگر آشنا کنیم. می‌دانید که اگر a یک عدد حقیقی باشد، $-a$ عضو متقابل (قرینه‌ی) a نسبت به عمل جمع اعداد است؛ به طوری که:
$$a+(-a)=-a+a=۰$$

هم‌چنین واضح است که با شرط $a\neq۰$، عدد $\frac{۱}{a}$ عضو متقابل (معکوس) عدد حقیقی a نسبت به عمل ضرب معمولی اعداد است؛ یعنی:
$$a\times\frac{۱}{a}=\frac{۱}{a}\times a=۱ \quad (a\neq۰)$$

اکنون این سؤال پیش می‌آید که عضو متقابل عمل دوتایی زیر چیست؟
$$\begin{cases} \oplus Z\times Z\to Z \\ \oplus(a,b)=a+b-۱ \end{cases}$$

برای این منظور مفهوم عضو متقابل را به این صورت بیان می‌کنیم.

عضو متقابل

فرض کنیم $*$ روی مجموعه‌ی A یک عمل دوتایی با عضو بی‌اثر e باشد. اگر برای هر $a\in A$، عضو منحصربه‌فردی مانند $a'\in A$ موجود باشد، به طوری که:
$$a*a'=a'*a=e$$
در این صورت a' را عضو متقابل a نسبت به عمل دوتایی $*$ روی مجموعه‌ی A می‌گوییم.

مثال: عمل دوتایی زیر را در نظر بگیرید:
$$\begin{cases} *:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ *(a,b)=a+b+۲ \end{cases}$$

الف) عضو بی‌اثر این عمل را بیابید.

ب) عضو متقابل هر عضو مانند $a\in\mathbb{R}$ را بیابید.

ج) معادله‌ی $x*(۳*۲)'=۳$ را حل کنید.

حل:

الف) اگر e عضو بی‌اثر این عمل باشد، داریم:
$$a*e=e*a=a$$
$$a*e=a\Rightarrow a+e+۲=a\Rightarrow e=-۲ \qquad (۱)$$
از طرف دیگر:
$$e*a=a\Rightarrow e=-۲ \qquad (۲)$$
با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $e=-۲$ منحصربه‌فرد و عضو بی‌اثر این عمل دوتایی است.

ب) اگر a' عضو متقابل عدد $a\in R$ باشد، داریم:
$$a*a'=a'*a=e$$
$$a*a'=e\Rightarrow a+a'+۲=-۲\Rightarrow a'=-۴-a \qquad (۱)$$
از طرف دیگر:
$$a'*a=e\Rightarrow a'+a+۲=-۲\Rightarrow a'=-۴-a \qquad (۲)$$
با توجه به روابط ۱ و ۲ ملاحظه می‌کنیم، $a'=-۴-a$ منحصربه‌فرد و عضو متقابل عدد $a\in R$ نسبت به عمل دوتایی $*$ است.

ج)
$$x*(۳*۲)'=۳\Rightarrow x*(۳+۲-۲)'=۳$$
$$\Rightarrow x*(۳)'=۳$$
چون $a'=-۴-a$، پس $(۳)'=-۴-۳=-۷$. درنتیجه داریم:
$$x*(۳)'=۳\Rightarrow x*(-۷)=۳\Rightarrow x+(-۷)+۲=۳\Rightarrow x=۸$$

تمرین: در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، آیا عمل داده شده روی مجموعه‌ی مفروض دوتایی است یا خیر؟ در صورتی که عمل دوتایی باشد، عضو بی‌اثر و متقابل هر عضو مانند a را به دست آورید.

الف) $S=Z;\ a*b=ab^۳$

ب) $S=Z;\ a*b=\frac{a}{a^۲+b^۲}$

ج) $S=Z;\ a*b=a+b-ab$

د) $S=R;\ a*b=\sqrt{a}$

---

۱. نخستین درس در جبر مجرد. ترجمه‌ی دکتر مسعود فرزان. مرکز نشر دانشگاهی.

۲. مباحثی در جبر. ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده. مؤسسه‌ی نشر علوم نوین.

3. Abstract Algebra, Afirst Course/ Dan Saracino