log

لگاریتم

احمد قندهاری

فرض می‌کنیم a عددی حقیقی و مثبت و مخالف عدد ۱ باشد. اگر اعدادی حقیقی مانند N و x وجود داشته باشند به‌طوری که $N = a^x$ ، در این صورت بنا به تعریف می‌گوییم: لگاریتم N در مبنای a برابر x است و می‌نویسیم:

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a N = x$$

عدد x را لگاریتم و عدد a را مبنای لگاریتم و عدد N را آنتی‌لگاریتم یا عدد L به‌ازا گوییم.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد مثبت است، پس a^x و N عددهایی مثبت‌اند. به همین دلیل است که می‌گویند اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند.

مثال ۱: از تساوی $\log_{\sqrt[۵]{۳}} ۳\sqrt{۳} = x$ ، x را بیابید.

حل: بنا به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت:

$$۳\sqrt{۳} = (\sqrt[۵]{۳})^x$$

دو طرف تساوی را به توان ۱۰ می‌رسانیم:

$$۳^{۱۰}(۳^۵) = (۳^۲)^x \Rightarrow ۳^{۱۵} = ۳^{۲x} \Rightarrow ۲x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۲}$$

مثال ۲: از تساوی $\log_{۲\sqrt[۳]{۲}} N = \frac{۳}{۴}$ ، N را بیابید.

حل: بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$N = (۲\sqrt[۳]{۲})^{\frac{۳}{۴}} \Rightarrow N = \left[۲^۳(۲)\right]^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow N = (۲^۴)^{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow N = ۲$$

مثال۳: اگر $\log_a(\sqrt{۲} - ۱) = -۱$ ، آن‌گاه a را بیابید.

حل. بنا به تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{-۱} = (\sqrt{۲} - ۱) \Rightarrow a = \frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} \Rightarrow a = \frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} \times \frac{\sqrt{۲} + ۱}{\sqrt{۲} + ۱}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{۲}+۱}{۱} \Rightarrow a = \sqrt{۲}+۱$$

فرمول‌های لگاریتم

توجه: هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد، مثبت و مخالف ۱ است.

۱) $۱ = a^{\circ} \Rightarrow \log_a ۱ = ۰$ (۱)

۲) $a = a^{۱} \Rightarrow \log_a a = ۱$ (۲)

۳. اگر $M = a^x$ و $N = a^y$، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$\log_a M = x$ و $\log_a N = y$

$$M.N = a^x.a^y \Rightarrow M.N = a^{x+y} \Rightarrow \log_a M.N = x+y$$

$$\Rightarrow \log_a M.M = \log_a M + \log_a N \qquad (۳)$$

تعمیم:

$$\log_a M.N\cdots K = \log_a M + \log_a N + \cdots + \log_a K$$

۴. اگر $M = a^x \Rightarrow \log_a M = x$

اگر $N = a^y \Rightarrow \log_a N = x$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y} \Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x-y$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \qquad (۴)$$

۵. $\log_a \frac{۱}{N} = \log_a ۱ - \log_a N \ , \ \log_a ۱ = ۰$

$$\Rightarrow \log_a \frac{۱}{N} = -\log_a N \qquad (۵)$$

۶. اگر $N = a^x \Rightarrow \log_a N = x$ و $x \neq ۰$

فرض می‌کنیم: $\log_{a^p} N^m = kx$. می‌خواهیم k را بیابیم.

بنا به تعریف می‌نویسیم: $N = a^x$ و $N^m = (a^p)^{kx}$

$$(a^x)^m = (a^p)^{kx} \Rightarrow a^{mx} = a^{kpx} \Rightarrow mx = kpx$$

$$\Rightarrow m = kp \Rightarrow k = \frac{m}{p}$$

$$\Rightarrow \log_{a^p} N^m = \frac{m}{p}\log_a N \qquad (۶)$$

مثال: $\log_{\sqrt{۵}} ۱۲۵ = \log_{۵^{\frac{۱}{۲}}} ۵^۳ = \frac{۳}{\frac{۱}{۲}}\log_۵ ۵ = ۶$

نتایج فرمول ۶

۱) $\log_a N^m = m\log_a N$

۲) $\log_{a^p} N = \frac{۱}{p}\log_a N$

۳) $\log_{\frac{۱}{a}} \frac{۱}{N} = \log_{a^{-۱}} N^{-۱} = \log_a N$

۴) $\log_{\sqrt[p]{a}} \sqrt[m]{N} = \log_{a^{\frac{۱}{p}}} N^{\frac{۱}{m}} = \frac{\frac{۱}{m}}{\frac{۱}{p}}\log_a N = \frac{p}{m}\log_a N$

۷. اگر $\log_b a = x$ و $\log_a b = y$، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$a = b^x,\ \ b = a^y \Rightarrow a = (a^y)^x \Rightarrow a = a^{x.y}$$

$$\Rightarrow x.y = ۱ \Rightarrow \log_b a \times \log_a b = ۱ \qquad (۷)$$

نتایج فرمول ۷

۱) $\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$

۲) $\log_{MN} a = \frac{۱}{\log_a MN} = \frac{۱}{\log_a M + \log_a N}$

مثال: حاصل $\log_{\sqrt{۲۴}}^{\sqrt{۳}}$ را بیابید.

حل:

$$\log_{\sqrt{۲۴}} \sqrt{۳} = \log_{۲۴} ۳ = \frac{۱}{\log_۳ ۲۴} = \frac{۱}{\log_۲ ۲^۳ \times ۳}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{۲۴}} \sqrt{۳} = \frac{۱}{\log_۲ ۲^۳ + \log_۲ ۳} = \frac{۱}{۳\log_۲ ۲ + \log_۲ ۳}$$

$$= \frac{۱}{۳ + \log_۲ ۳}$$

۸. فرض می‌کنیم: $\log_b a = x$ و $\log_c b = y$ و $\log_c a = z$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$a = b^x \ , \ b = c^y \ , \ a = c^z$$

$$a = a \Rightarrow c^z = b^x \Rightarrow c^z = (c^y)^x \Rightarrow c^z = c^{xy}$$

$$\Rightarrow z = xy \Rightarrow \log_b a \times \log_c b = \log_c a \qquad (۸)$$

تعمیم:

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \cdots \times \log_n k = \log_n a$$

مثال:

$$\log_۷ ۳۶ \times \log_۶ ۷ = \log_۶ ۳۶ = \log_۶ ۶^۲ = ۲\log_۶ ۶ = ۲$$

توجه: اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد، آن را نمی‌نویسیم.

۹.

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \qquad (۹)$$

۱۰ .

$$\text{اگر}\begin{cases}\log_c x = k \Rightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Rightarrow k = b^p \quad \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}} \\ \log_a p = m \Rightarrow p = a^m\end{cases}$$

$$m = \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log_b(\log_c x))$$

$$\Rightarrow \log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}} \qquad (10)$$

مثال: اگر $\log_{\sqrt[4]{3}}(\log_{\sqrt[3]{2}}(\log_{\sqrt[4]{2}} x)) = 4$ ، آن‌گاه x را بیابید.

حل:

$$x = \sqrt[4]{2}^{\sqrt[3]{2}^{\sqrt[4]{3}^{4}}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}^{\sqrt[3]{2}^{3}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{2}^{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

۱۱ .

$$\log_a N = p \Rightarrow N = a^p \Rightarrow N = (a)^{\log_a N} \qquad (11)$$

۱۲ . همواره داریم:

$$(x)^{\log_a y} = (y)^{\log_a x} \qquad (12)$$

اگر از دو طرف در مبنای a لگاریتم بگیریم، داریم:

$$\log_a y . \log_a x = \log_a x . \log_a y$$

تذکر: در تعریف لگاریتم گفتیم، a عددی حقیقی و مثبت و $a \neq 1$ است. پس برای a دو حالت وجود دارد: حالت اول $a > 0$ و حالت دوم $0 < a < 1$.

حال چند رابطه را در این دو حالت بررسی می‌کنیم:

حالت اول: $a > 1$ ، $\log a > 0$

$$(I) \quad \log_a N > 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 0 \; , \; \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N > 0 \Rightarrow N > 1$$

$$(II) \quad \log_a N < 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 0 \; , \; \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N < 0 \Rightarrow 0 < N < 1$$

$$(III) \quad \log_a N > 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 1 \; , \; \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N > \log a \Rightarrow N > a$$

$$(IV) \quad \log_a N < 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 1 \; , \; \log a > 0 \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow 0 < N < a$$

$$(V) \quad \log_a N > -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -1 \; , \; \log a > 0 \Rightarrow \log N > -\log a$$

$$\Rightarrow \log N > \log a^{-1} \Rightarrow \log N > \log \frac{1}{a} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

$$(VI) \quad \log_a N < -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -1 \; , \; \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N < -\log a$$

$$\Rightarrow \log N < \log a^{-1} \Rightarrow \log N < \log \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

حالت دوم: $0 < a < 1$ ، $\log a < 0$

$$(I)' \quad \log_a N > 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 0 \; , \; \log a < 0 \Rightarrow \log N < 0$$

$$\Rightarrow 0 < N < 1$$

$$(II)' \quad \log_a N < 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 0 \; , \; \log a < 0 \Rightarrow \log N > 0$$

$$\Rightarrow N > 1$$

$$(III)' \quad \log_a N > 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 1 \; , \; \log a < 0 \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow 0 < x < a$$

$$(IV)' \quad \log_a N < 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 1 \; , \; \log a < 0 \Rightarrow \log N > \log a$$

$$\Rightarrow x > a$$

$$(V)' \quad \log_a N > -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -1 \; , \; \log a < 0$$

$$\Rightarrow \log N < -\log = \log \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

$$(VI)' \quad \log_a N < -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -1 \; , \; \log a < 0$$

$$\Rightarrow \log N > -\log a = \log \frac{1}{a} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

سؤال‌های چهارگزینه‌ای

۱ . اگر $\log(\log(\log x)) = 0$ ، آن‌گاه x کدام است؟

۱) 0 ‏ ۲) 1 ‏ ۳) 1000 ‏ ۴) 10^{10}

حل: گزینه‌ی (۴)

$$\log(\log(\log x)) = 0 \Rightarrow \log(\log x) = 1 \Rightarrow \log x = 10$$

$$\Rightarrow x = 10^{10}$$

۲ . حاصل $(\sqrt{10})^{16 \log \sqrt[4]{3}} - 8 \log \sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{9}{8}$

حل: گزینه‌ی (۲)

$$=(10)^{8\log\sqrt[4]{3}-4\log\sqrt{2}}=(10)^{\log 9-\log 4}=(10)^{\log\frac{9}{4}}=\frac{9}{4}$$

۳. اگر $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x+\log_{16} x=(10)^{\log\frac{25}{12}}$ ، آن‌گاه x کدام است؟

۱) 8 ۲) $4\sqrt{2}$ ۳) 4 ۴) 2

حل: گزینه‌ی (۴)

$$=\log_2 x+\log_{\frac{1}{2^2}} x+\log_{\frac{1}{2^3}} x+\log_{\frac{1}{2^4}} x=\frac{25}{12}$$

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=\frac{25}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{25}{12}\log_2 x=\frac{25}{12}\Rightarrow\log_2 x=1\Rightarrow x=2$$

۴. اگر $y\times 5^{\log x}=x^2$ ، مقدار y کدام است؟

۱) $20^{\log x}$ ۲) $10^{\log x}$ ۳) $2^{\log x}$ ۴) $5^{\log x}$

حل: گزینه‌ی (۱)

$$y=\frac{x^2}{5^{\log x}}=\frac{x^2}{x^{\log 5}}=x^{2-\log 5}=x^{\log 100-\log 5}$$

$$\Rightarrow y=x^{\log 20}=20^{\log x}$$

۵. اگر $(x)^{\log x}=(\frac{x}{10})^6$ ، آن‌گاه x کدام است؟

۱) 1 ۲) 10 ۳) 10^2 ۴) 10^4

حل: گزینه‌ی (۳). از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم.

$$\log x.\log x=4\log\frac{x}{10}\Rightarrow(\log x)^2=4(\log x-\log 10)$$

$$(\log x)^2-4\log x+4=0\Rightarrow(\log x-2)^2=0\Rightarrow\log x=2$$
$$\Rightarrow x=100$$

۶. اگر $M=(\log_6 5)^{\cos\alpha}$ ، آن‌گاه بیشترین مقدار M کدام است؟

۱) 1 ۲) $+\infty$ ۳) $\log\frac{6}{5}$ ۴) $\log_6 5$

حل: گزینه‌ی (۳). چون $\log_6 5$ عددی بین صفر و یک است و این عدد به توان ۱,...,۰,...,۱− برسد، وقتی ماکزیمم است که توانش ۱− باشد.

$$Max(M)=(\log_6 5)^{-1}=\frac{1}{\log_6 5}=\log_5 6$$

۷. اگر $\log_x a=4$ و $\log_y a=2$ و $\log_z a=3$ ، آن‌گاه $\log^a_{x.y.z}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{12}$ ۲) $\frac{12}{13}$ ۳) $\frac{8}{11}$ ۴) $\frac{11}{8}$

حل: گزینه‌ی (۲).

$$\log_{x.y.z} a=\frac{1}{\log_a x.y.z}=\frac{1}{\log_a x+\log_a y+\log_a z}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{12}{13}$$

۸. اگر $3^{\frac{n+1}{2}}=(4)^{\log_2 9}$ ، آن‌گاه n کدام است؟

۱) 5 ۲) 6 ۳) 7 ۴) 8

حل: گزینه‌ی (۳).

$$3^{\frac{n+1}{2}}=4^{\log_2 9}\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=4^{\log_4 81}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=81\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}}=3^4\Rightarrow\frac{n+1}{2}=4\Rightarrow n=7$$

۹. اگر $\log_{11} N=a$ ، آن‌گاه $\log_{\sqrt{N}} 121$ کدام است؟
(کنکور سراسری)

۱) $2a$ ۲) $\frac{a}{2}$ ۳) $\frac{4}{a}$ ۴) $\frac{a}{4}$

حل: گزینه‌ی (۳).

$$\log_{11} N=a\Rightarrow\log_N 11=\frac{1}{a}$$

$$\log_{\sqrt{n}} 121=\log_{n^{\frac{1}{2}}} 11^2=\frac{2}{\frac{1}{2}}\log_n 11=4\log_n 11=4(\frac{1}{a})=\frac{4}{a}$$

۱۰. جواب معادله‌ی $\log(\log x)=\log(7-2\log x)-\log 5$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 5 ۳) 10 ۴) 100

حل: گزینه‌ی (۳).

$$\log(\log x)=\log(\frac{7-2\log x}{5})$$

چون تابع $y=\log x$ تابعی یک به یک است، می‌توان نوشت:

$$\log x=\frac{7-2\log x}{5}\Rightarrow 5\log x=7-2\log x$$
$$\Rightarrow 7\log x=7\Rightarrow\log x=1\Rightarrow x=10$$