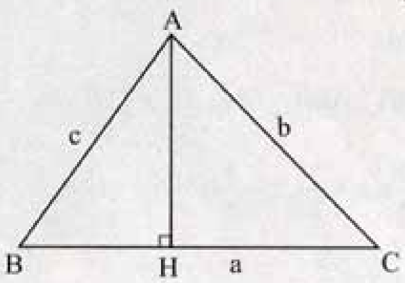
اثبات دیگر بر قضیه‌ی هرون

● هوشنگ شرقی

قضیه‌ی هرون از قضایای کلیدی و مهم در هندسه است که در بیشتر کتاب‌های کلاسیک هندسه (به‌غیر از کتاب‌های هندسه‌ی ۱ و ۲ دوره‌ی متوسطه!) آمده است. به کمک این قضیه می‌توان مساحت هر مثلث را با داشتن طول اضلاع آن محاسبه کرد. اگر اضلاع مثلث را با a، b و c و محیط آن را با $2p$ نمایش دهیم $(a+b+c=2p)$، مساحت آن (S) از دستور $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ به‌دست می‌آید.



دستور فوق به **هرون اسکندرانی** منسوب است که در حدود قرن دوم میلادی در اسکندریه‌ی مصر می‌زیست و در زمینه‌ی محاسبات هندسی کارهای زیادی انجام داده که از جمله‌ی آن‌ها همین دستور است. روش معمول در اثبات این قضیه که در اکثر کتاب‌ها ذکر شده است، استفاده از قضیه‌ی **فیثاغورس** همراه با محاسبات جبری نسبتاً طولانی است. به‌عنوان تمرین، برای کسانی که با این اثبات آشنایی ندارند، راهنمایی‌هایی برای اثبات آن در پی می‌آید:

الف) در شکل قبل رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث ABH بنویسید و با جای‌گذاری $BH=a-CH$ نتیجه بگیرید:

$$CH=\frac{a^2+b^2+c^2}{2a}.$$

ب) به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث AHC و دستور $AH=\sqrt{b^2-CH^2}$ و نتیجه‌ی بند (الف)، طول ارتفاع AH را بر حسب a، b و c به‌دست آورید.

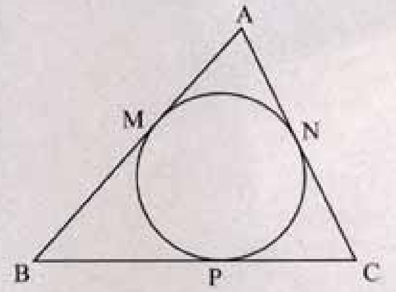
ج) با تجزیه‌ی عبارت جبری زیر رادیکال و فرض $a+b+c=2p$، سعی کنید عبارت فوق را به $AH=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ تبدیل و از آن‌جا به سادگی دستور هرون را استخراج کنید.

چنان‌که ملاحظه کردید، روش فوق در اثبات دستور هرون محاسبات جبری نسبتاً پیچیده‌ای دارد، لذا روش‌های دیگری هم برای اثبات آن ابداع شده است که یکی از جالب‌ترین آن‌ها درپی می‌آید.

***

برای اثبات این دستور، ابتدا سه پیش‌قضیه‌ی زیر مطرح می‌شوند که گرچه هر سه آن‌ها قضایای معروفی هستند، ولی اثبات آن‌ها را هم می‌آوریم.

قضیه‌ی ۱. دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC، روی اضلاع مثلث شش قطعه پدید می‌آورد که دوبه‌دو با هم برابر، و مساوی $p-a$، $p-b$ و $p-c$ هستند (p نصف محیط و a، b و c طول‌های اضلاع مثلث هستند).



اثبات: برابری این قطعات با توجه به قضیه‌ی برابری مماس‌های مرسوم از یک نقطه خارج از دایره بر آن، واضح است؛ یعنی: $AM=AN$، $CN=CP$ و $BM=BP$.

از آن‌جا می‌توان نوشت:

$$AN=AC-CN=AC-CP=AC-(BC-BP)$$
$$=AC-BC+BP=AC-BC+BM=AC-BC+AB-AM$$
$$=AC+AB-BC-AN\Rightarrow AN=b+c-a-AN$$
$$\Rightarrow 2AN=b+c-a\Rightarrow 2AN=(a+b+c)-2a=2P-2a$$
$$\Rightarrow AN=P-a\Rightarrow AM=AN=P-a$$

و به همین صورت ثابت می‌شود: $CN=CP=p-c$ و $BM=BP=p-b$

قضیه‌ی ۲. اگر α، β و γ سه زاویه‌ی حاده باشند و $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$، آن‌گاه:

$$tg\alpha tg\beta+tg\alpha tg\gamma+tg\beta tg\gamma=1$$

اثبات: به کمک دستور تانژانت مجموع دو زاویه به‌راحتی می‌توان نوشت:

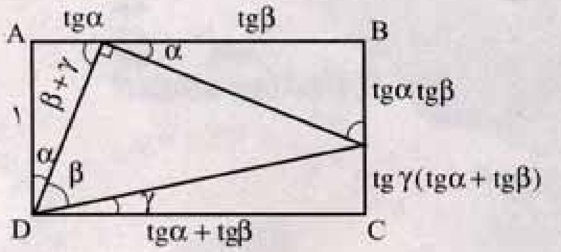
$$\alpha+\beta=90-\gamma\Rightarrow tg(\alpha+\beta)=tg(90-\gamma)\Rightarrow tg(\alpha+\beta)$$

$$=\cot g\gamma\Rightarrow\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}=\frac{1}{tg\gamma}\Rightarrow tg\alpha tg\beta+tg\beta tg\gamma$$
$$=1-tg\alpha tg\beta\Rightarrow tg\alpha tg\beta+tg\alpha tg\gamma+tg\beta tg\gamma=1$$

تمرین ۱. به کمک روشی مشابه، ثابت کنید: اگر $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ باشد، آن‌گاه:

$$tg\alpha+tg\beta+tg\gamma=tg\alpha tg\beta tg\gamma$$

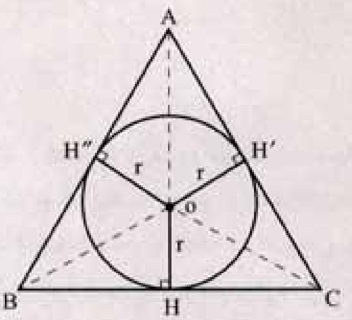
تمرین ۲. یک راه‌حل زیبای هندسی هم برای اثبات رابطه‌ی فوق وجود دارد. به شکل زیر توجه کنید:



مستطیل $ABCD$ به طول $AB=CD=tg\alpha+tg\beta$ و به عرض $AD=BC=1$ رسم شده است. با توجه به شکل، $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ و درستی اندازه‌ها را با توجه به شکل و به سادگی می‌توانید تحقیق کنید. هم‌چنین، با توجه به برابری $AD=BC$، درستی رابطه‌ی فوق را تحقیق کنید.

قضیه‌ی ۳. اگر S مساحت، $2p$ محیط و r شعاع دایره‌ی محاطی مثلث ABC باشد، داریم:

$$r=\frac{S}{P}$$



اثبات: مطابق شکل، O مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC است و $OH=OH'=OH''=r$ و می‌توان نوشت:

$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}$$
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}OH''.AB+\frac{1}{2}OH'.AC+\frac{1}{2}OH.BC$$
$$=\frac{1}{2}r.c+\frac{1}{2}r.b+\frac{1}{2}r.a=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr$$
$$\Rightarrow S=pr\ ,\ r=\frac{S}{P}$$

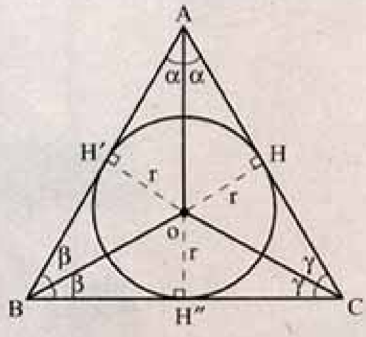
تمرین ۳. اگر h_a، h_b و h_c ارتفاعات نظیر اضلاع a، b و c

مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

* * *

اکنون به کمک این سه قضیه، می‌توان درستی قضیه‌ی هرون را به‌سادگی اثبات کرد. مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC، نقطه‌ی برخورد نیم‌سازهاست. بنابراین مطابق شکل داریم:



$$\Delta OAH: tg\alpha=\frac{r}{AH}=\frac{r}{p-a}$$

$$\Delta OBH': tg\beta=\frac{r}{BH'}=\frac{r}{p-b}, \Delta OCH'': tg\gamma=\frac{r}{CH''}=\frac{r}{p-c}$$

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=90^\circ$$

$$\Rightarrow tg\alpha\, tg\beta+tg\alpha\, tg\gamma+tg\beta\, tg\gamma=1$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{(p-a)(p-b)}+\frac{r^2}{(p-a)(p-c)}+\frac{r^2}{(p-b)(p-c)}=1$$

$$\Rightarrow r^2\left[\underbrace{(p-c)+(p-b)+(p-c)}_{3p-(a+b+c)=3p-2p=p}\right]=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow r^2p=(p-a)(p-b)(p-c),\quad r=\frac{S}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{S^2}{p^2}p=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Rightarrow S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)\Rightarrow S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

تمرین ۴. مثلث ABC به اضلاع ۷، ۸ و ۵ مفروض است.
اولاً به کمک دستور هرون مساحت مثلث را محاسبه کنید و نیز طول شعاع دایره‌ی محاطی و طول‌های ارتفاع‌های مثلث را به‌دست آورید. ثانیاً به کمک شکل بالا، مقادیر $tg\frac{A}{2}$، $tg\frac{B}{2}$ و $tg\frac{C}{2}$، و به کمک دستور $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$، مقادیر tgA، tgB و tgC را به‌دست آورید و نشان دهید:

$$tgA+tgB+tgC=tgA\,tgB\,tgC$$

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}=1$$

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

● احسان یارمحمدی

Math Archives
http://archives.math.utk.edu

در صفحه‌ی اصلی این سایت، تیتر «عنوان‌های ریاضیات» (Topics in Mathematics) را مشاهده می‌کنیم. درواقع در صفحات این سایت، مخاطب لینک‌های متنوعی را پیدا خواهد کرد که به‌وسیله‌ی موضوعات ریاضیات سازمان‌دهی و طراحی شده‌اند. برای جست‌وجوی مفید و مؤثر در این سایت و نیز دست‌یابی به اطلاعات مورد نظرتان، دو روش پیش‌روی شماست:

الف) می‌توانید با کلیک کردن روی عبارت مورد نظر خود، به هریک از صفحات زیر بروید:

۱. جبر مجرد (Abstract Algebra)
۲. جبر (Algebra)
۳. آنالیز (Analysis)
۴. ریاضیات کاربردی (Applied Mathematics)
۵. حساب (Arithmetic)
۶. هنر و موسیقی (Art & Music)
۷. حساب دیفرانسیل و انتگرال (Calculus)
۸. نظریه‌ی ماشین‌های بافت سلولی (Cellular Automata)
۹. ترکیبیات (Combinatorics)
۱۰. آنالیز مختلط (Complex Analysis)
۱۱. هندسه‌ی محاسباتی (Computational Geometry)
۱۲. علم محاسباتی (Computational Science)
۱۳. جبر رایانه/ رمزشناسی
(Computer Algebra/ Cryptology)
۱۴. الگوریتم‌های ژنتیکی (Genetic Algorithms)
۱۵. هندسه‌ی دیفرانسیل (Differential Geometry)
۱۶. ریاضیات گسسته (Discrete Mathematics)
۱۷. دستگاه‌های دینامیکی (Dynamical Systems)
۱۸. حرکت اجسام سیال (Fluid Dunamics)
۱۹. آنالیز فوریه و امواج ضربه‌ای
(Fourier Analysis & Wavelets)
۲۰. فراکتال‌ها (Fractals)
۲۱. هندسه (Geometry)
۲۲. تاریخ ریاضیات (History of Mathematics)
۲۳. ریاضیات صنعتی (Industrial mathematics)
۲۴. برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی
(Linear & Nonlinear Programing)

ادامه در صفحه‌ی ۴۶