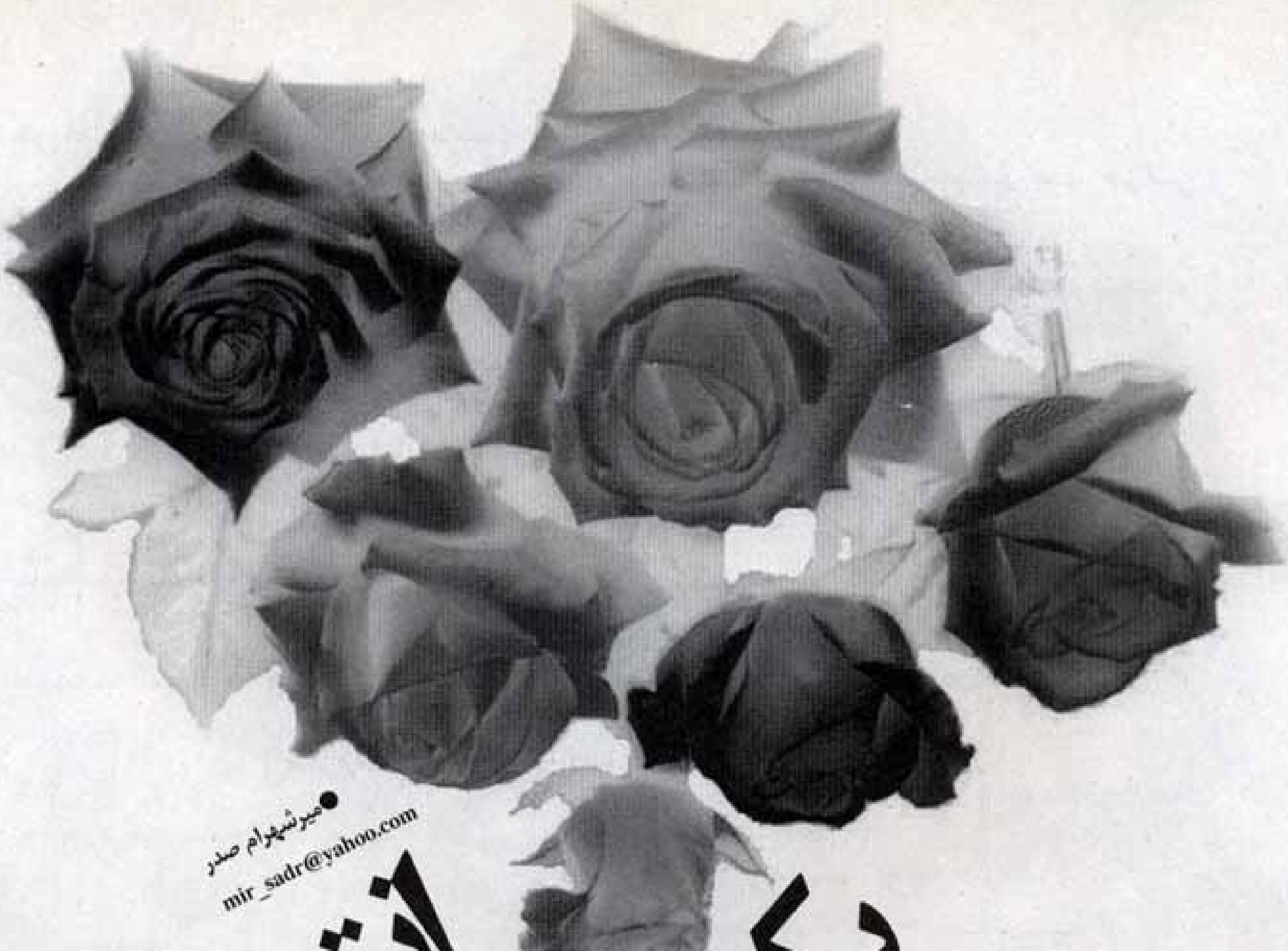


انتخاب یک دسته گل

میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

فرض کنیم دو نوع گل و به تعداد فراوان از هر نوع، موجود است. می‌خواهیم دسته گلی با چهار شاخه گل از این دو نوع گل انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

اگر x_1 گل از نوع اول و x_2 گل از نوع دوم انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با چهار شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله‌ی زیر را داریم:

$$x_1 + x_2 = 4$$

جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی اخیر را می‌توان به صورت جدول زیر نوشت:

x_1	x_2
۰	۴
۱	۳
۲	۲
۳	۱
۴	۰

ملاحظه می‌کنیم که معادله‌ی $x_1 + x_2 = 4$ دارای ۵ جواب صحیح و نامنفی است که عبارت‌اند از: (۰,۴)، (۱,۳)، (۲,۲)، (۳,۱) و (۴,۰).

در حالت کلی فرض کنید، k نوع متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است و می‌خواهیم، n شاخه گل از این k نوع گل انتخاب کنیم. اگر x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و ... و x_k گل از نوع kام انتخاب کنیم، چون یک دسته گل با n شاخه نیاز داریم، بنابراین معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$(1)\qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n\ ;\ (x_i \ge 0\ ,\ i = 1, 2, \ldots, k)$$

اکنون برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (۱)، قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$

قضیه: فرض کنیم، k نوع متفاوت گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. ثابت کنید تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن‌ها تکرار نیز مجاز است، برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

برهان: kنوع متفاوت گل را می‌توان با $(k-1)$ پاره‌خط متمایز کرد. هم‌چنین، اگر تعداد انتخاب‌های گل‌ها، از هر نوع را با تعدادی علامت ستاره (*) مشخص کنیم (باید تعداد ستاره‌ها برابر با n باشد)، در این صورت دارای nستاره و $(k-1)$ پاره‌خط هستیم. در نتیجه، $(n+(k-1))$ خط و ستاره وجود دارد که تعداد کل تبدیلات این اشیا برابر با $(n+(k-1))!$ است. اگر در این تبدیلات، پاره‌خط‌ها را یا ستاره‌ها را باهم جابه‌جا کنیم، حالت جدیدی ایجاد نمی‌شود، بنابراین طبق قاعده‌ی تبدیل با تکرار[1] خواهیم داشت:

نوع اول	نوع دوم	...	نوع kام
**	****	...	**...*

($k-1$= تعداد پاره‌خط‌ها، n=تعداد ستاره‌ها)

$$P_n=\frac{(n+(k-1))!}{n!\times(k-1)!}=\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}$$

نتیجه: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (۱) برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

دیدیم که معادله‌ی $x_1+x_2=4$ دارای ۵ جواب صحیح و نامنفی است. اکنون می‌توان با استفاده از فرمولی که به‌دست آورده‌ایم، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را محاسبه کنیم.

$$n=4,\ k=2;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{4+2-1}{2-1}=\binom{5}{1}=5$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۸ عدد شکلات را بین ۶ نفر طوری تقسیم کرد، که ممکن است به بعضی‌ها شکلات نرسد؟

حل: اگر x_1 شکلات به نفر اول و x_2 شکلات به نفر دوم و... و x_6 شکلات به نفر ششم بدهیم، معادله‌ی زیر را خواهیم داشت:

$x_1+x_2+\cdots+x_6=8;\ (x_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,6)$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی بالا برابر است با:

$$n=8,\ k=6;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+6-1}{6-1}=\binom{13}{5}=1287$$

مثال: دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}x_1+x_2=3\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\end{cases}$$

چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

حل: معادله‌ی $x_1+x_2=3$ دارای $\binom{3+2-1}{2-1}=\binom{4}{1}=4$ جواب صحیح نامنفی است. اگر در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7$، $x_1+x_2=3$ قرار دهیم، بنابراین معادله‌ی $x_3+x_4+x_5=4$ به‌دست می‌آید که دارای $\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$ جواب صحیح نامنفی است. طبق اصل ضرب، این دستگاه دارای $\binom{6}{2}\times\binom{4}{1}=60$ جواب صحیح و نامنفی است.

مسئله: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4\le 10$ را بیابید.

حل: می‌دانیم: $a\le b$؛ یعنی وجود دارد عدد حقیقی نامنفی $y\ge 0$ به‌طوری که: $a+y=b$. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4\le 10$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+y=10$ است. این تعداد جواب برابر است با:

$$n=10,\ k=5;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{14}{4}$$

مثال: تعداد جملات بسط $(x+y)^8$ را بیابید.

حل: می‌دانیم، عبارت حرفی هر جمله‌ی بسط $(x+y)^8$ به‌صورت $x^{n_1}y^{n_2}$ است که در آن: $n_1+n_2=8$ و $n_1\ge 0$ و $n_2\ge 0$. در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر با تعداد جملات بسط است. در نتیجه:

$$n=8,\ k=2;\ \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{8+2-1}{2-1}=\binom{9}{1}=9$$

تعداد جملات بسط $(a_1+a_2+\dots+a_k)^n$

هر جمله‌ی بسط $(a_1+a_2+\dots+a_k)^n$ دارای عبارت حرفی به‌صورت $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_n^{n_k}$ است که در آن، $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ و برای هر $1\le i\le k$ داریم: $n_i\ge 0$. در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، برابر با تعداد جملات این بسط است که برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$.

مثال: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^{10}$ را بیابید.

حل: $n=10$ ، $k=3$. پس تعداد جملات بسط برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}=66$$

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$

می‌خواهیم ۸ عدد شکلات را بین شش نفر تقسیم کنیم، به‌طوری که به هریک حداقل یک شکلات برسد، این کار به چند طریق ممکن است؟ به این منظور، ابتدا به هر نفر یک شکلات می‌دهیم. سپس

۲ شکلات باقی می‌ماند که باید آن را بین ۶ نفر تقسیم کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=2$ را می‌یابیم. جواب مسئله برابر است با:

$$n=2\ ,\ k=6\ ;\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{7}{5}=21$$

اکنون می‌خواهیم تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر را به‌دست آوریم:

$$x_1+x_2+\dots+x_k=n$$

به این منظور، فرض کنیم می‌خواهیم که n شیء را بین k نفر تقسیم کنیم، به‌طوری که به هریک حداقل یک شیء برسد. بنابراین ابتدا به هریک از k نفر، یک شیء می‌دهیم. در نتیجه $(n-k)$ شیء، باقی می‌ماند که باید آن را بین k نفر تقسیم کنیم. پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n-k$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

به بیان دیگر می‌توان گفت که در جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+\dots+x_k=n$، برای هر $1\le i\le k$ داریم:

$$x_i>0$$

چون برای هر $0\le i\le k$، x_i یک عدد صحیح بزرگ‌تر از صفر است، یعنی $x_i>0$، پس: $x_i\ge1$ در نتیجه: $x_i-1\ge0$ و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
x_1>0&\Rightarrow x_1\ge1\Rightarrow x_1-1\ge0\\
x_2>0&\Rightarrow x_2\ge1\Rightarrow x_2-1\ge0\\
&\vdots\\
x_k>0&\Rightarrow x_k\ge1\Rightarrow x_k-1\ge0
\end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم $y_i=x_i-1\ge0$، $(1\le i\le k)$ بنابراین: $x_i=y_i+1$. پس داریم:

$$x_1+x_2+\dots+x_k=n\ ,\ x_i=y_i+1\Rightarrow\quad(1\le i\le k)$$

$$y_1+1+y_2+1+\dots+y_k+1=n\Rightarrow$$

$$y_1+y_2+\dots+y_k=n-k$$

در معادله‌ی بالا، برای هر $1\le i\le k$ داریم: $y_i\ge0$ که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله، جواب مسئله است و برابر است با:

$$\binom{(n-k)+k-1}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ سیب و ۶ پرتقال را بین چهار نفر تقسیم کرد، به‌طوری که: الف) به صورت دل‌خواه میوه‌ها را تقسیم کنیم و ممکن است به کسی میوه نرسد؟ ب) به هر نفر حداقل یک میوه برسد؟ ج) به هر نفر حداقل یک سیب برسد؟

حل:

الف) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را به‌صورت دل‌خواه بین ۴ نفر تقسیم کنیم. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=13$ را پیدا می‌کنیم که برابر است با:

$$\binom{13+4-1}{4-1}=\binom{16}{3}$$

ب) ۱۳ عدد میوه داریم و می‌خواهیم آن‌ها را طوری بین ۴ نفر تقسیم کنیم که به هریک حداقل یک عدد میوه برسد. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=13$ را می‌یابیم که برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{13-1}{4-1}=\binom{12}{3}$$

ج) ابتدا به هر نفر یک سیب می‌دهیم، بنابراین ۳ سیب و ۶ پرتقال برایمان باقی می‌ماند که در مجموع ۹ عدد میوه داریم. اکنون ۹ میوه را بین ۴ نفر تقسیم می‌کنیم، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر، جواب است.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=9$$

$$\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10\ (I)$ را با شرط $x_1>0$، $x_2\ge2$ و $x_3>3$ به‌دست آورید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_1>0\Rightarrow x_1\ge1\Rightarrow\overbrace{x_1-1}^{y_1}\ge0\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1+1\\ y_1\ge0\end{cases}\quad(1)$$

$$x_2\ge2\Rightarrow\overbrace{x_2-2}^{y_2}\ge0\Rightarrow\begin{cases}x_2=y_2+2\\ y_2\ge0\end{cases}\quad(2)$$

$$x_3>3\Rightarrow x_3\ge4\Rightarrow\overbrace{x_3-4}^{y_3}\ge0\Rightarrow\begin{cases}x_3=y_3+4\\ y_3\ge0\end{cases}\quad(3)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) در معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ خواهیم داشت:

$$y_1+1+y_2+2+y_3+4=10\Rightarrow y_1+y_2+y_3=3\quad(II)$$

چون در این معادله، $y_1\ge0$، $y_2\ge0$، $y_3\ge0$، بنابراین تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را به‌دست می‌آوریم که با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ با شرایط $x_1>0$، $x_2\ge2$ و $x_3>3$ برابر است؛ زیرا با تغییر متغیرهایی که روی معادله‌ی (I) انجام دادیم، معادله‌ی (II) را به‌دست آوردیم. برای مثال، (۱ و ۱ و ۱) یک جواب برای معادله‌ی

(II) است، به‌طوری که: $y_1 = 1$ و $y_2 = 2$ و $y_3 = 1$. اکنون اگر این مقادیر را در رابطه‌های (۱)، (۲)، (۳) جای‌گزین کنید، ملاحظه خواهید کرد که: $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$ و $x_3 = 5$. بنابراین (۵و۳و۲) یک جواب معادله‌ی (I) با شرایط داده شده است.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (II) $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ را با شرط $x_i \ge 3$ برای $i = 1,2,3,4$ پیدا کنید.

حل: تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$x_i \ge 3 \Rightarrow \overbrace{x_i - 3}^{y_i} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x_i = y_i + 3 \\ y_i \ge 3 \end{cases} \quad i = 1,2,3,4$$

با قرار دادن رابطه‌ی بالا در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 3 + y_2 + 3 + y_3 + 3 + y_4 + 3 = 17 \Rightarrow$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی آخری با تعداد جواب‌های مسئله برابر است، بنابراین:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

مثال: مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر:

۱. $x_1^2 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$

حل. با توجه به معادله داریم؛ $0 \le x_1 \le 3$ ، درنتیجه:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 10 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{12}{2} = 66$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 9 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{11}{2} = 55$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 6 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{8}{2} = 28$$

$$x_1 = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3}{2} = 3$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 66 + 55 + 28 + 3 = 152$$

۲. $\sqrt{x_1} + x_2 + x_3 = 3$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4}{1} = 4$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3}{1} = 3$$

$$x_1 = 4 \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{2}{1} = 2$$

$$x_1 = 9 \Rightarrow x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{1}{1} = 1$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

۳. $x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 13$

حل. با توجه به معادله، ملاحظه می‌کنیم که $0 \le x_3 \le 3$ ، درنتیجه داریم:

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 13$$
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{16}{3} = 560$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 9$$
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{12}{3} = 220$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5$$
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{8}{3} = 56$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4}{3} = 4$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 560 + 220 + 56 + 4 = 840$$

در ادامه‌ی بحث، برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ با شرطی مانند $a \le x_i \le b$ ؛ $a, b \in \mathbb{Z}, (1 \le i \le n)$ باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم. از این رو، ابتدا این اصل را بیان می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول

عدد اصلی یک مجموعه

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و دارای n عضو باشد. در این صورت، تعداد اعضای A را با نماد $|A|$ یا $n(A)$ نمایش می‌دهیم و به آن عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گوییم. در این حالت می‌نویسیم:

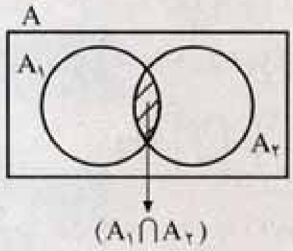
$$|A| = n$$

اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم، A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل n عضو باشد $(n \in \mathbb{N})$. اگر A_1 و A_2 دو زیر مجموعه‌ی A باشند، برای محاسبه‌ی

$|A_1\cup A_2|$، ابتدا حاصل جمع $|A_1|+|A_2|$ را به‌دست می‌آوریم. در این حاصل‌جمع، تعداد عضوهای مشترک بین A_1 و A_2 دوباره شمرده می‌شوند، یعنی مقدار $|A_1\cap A_2|$ را دوبار به حساب می‌آوریم (شمول آن‌ها دوبار به حساب آمده است). بنابراین، $|A_1\cap A_2|$ یک‌بار در A_1 یک‌بار در A_2 محاسبه شده است. برای محاسبه‌ی تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه‌ی A_1 یا A_2 تعلق دارند، یعنی $|A_1\cup A_2|$، باید یکی از این دوبار را کنار گذاشت (عدم شمول)، در نتیجه داریم:

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$$



$(A_1\cap A_2)$

نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از مجموعه‌های A_1 و A_2 تعلق نداشته باشد، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم ($\overline{A_1}$ را متمم مجموعه‌ی Aدرنظر می گیریم):

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=n-\left(|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|\right)$$

زیرا:

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\left(\overline{A_1\cup A_2}\right)$$

اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعه‌ی متناهی

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی متناهی و شامل nعضو باشد. اگر A_1، A_2 و A_3 سه زیر مجموعه از A باشند، برای محاسبه‌ی $|A_1\cup A_2\cup A_3|$؛ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|$$
$$-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

نکته: برای یافتن تعداد اعضایی از A که به هیچ یک از سه مجموعه‌ی A_1، A_2 و A_3 تعلق نداشته باشند، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=n-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$

محاسبه‌ی تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ با شرط $a\le x_i\le b$

اکنون وقت آن رسیده است که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد جواب‌های صحیح این معادله را در حالتی که $a\le x_i\le b$، $a,b\in W, i=1,2,\ldots,n$ به دست آوریم. برای تشریح این موضوع از چند مثال و مسئله استفاده می‌کنیم.

مثال: در یک گل‌فروشی، سه رنگ متفاوت گل رُز وجود دارد. فرض کنید می‌خواهیم دسته‌گلی با ۹ شاخه گل رُز انتخاب کنیم به‌طوری که از رُز زرد ۲تا۵ شاخه و از رُز سفید ۱ تا ۳ شاخه در آن موجود باشد. این **انتخاب دسته گل** به چند طریق ممکن است.

حل: فرض کنیم x_1 گل از نوع اول، x_2 گل از نوع دوم و x_3 گل از نوع سوم انتخاب کنیم. در این صورت، با توجه به صورت مثال داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=9\\2\le x_1\le 5\\1\le x_2\le 3\end{cases}$$

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم:

$$2\le x_1\le 5\Rightarrow 0\le\overbrace{x_1-2}^{y_1}\le 3\Rightarrow\begin{cases}0\le y_1\le 3\\x_1=y_1+2\end{cases}\quad(1)$$

$$1\le x_2\le 3\Rightarrow 0\le\overbrace{x_2-1}^{y_2}\le 2\Rightarrow\begin{cases}0\le y_2\le 2\\x_2=y_2+1\end{cases}\quad(2)$$

با قرار دادن تغییر متغیرهای (۱) و (۲) در معادله داریم:

$$y_1+2+y_2+1+x_3=9\Rightarrow y_1+y_2+x_3=6$$

اکنون معادله‌ی $y_1+y_2+x_3=6(I)$ را با شرایط $0\le y_1\le 3$ و $0\le y_2\le 2$ داریم. پیدا کردن تعداد جواب‌های این معادله با شرایط داده شده به‌طور مستقیم کاری دشوار است. به همین منظور، به روش غیرمستقیم و با استفاده از اصل شمول و عدم شمول جواب مسئله را می‌یابیم. برای انجام این کار، ابتدا تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) را به‌دست می‌آوریم و آن را $|A|$ می‌نامیم: $|A|=\binom{6+3-1}{3-1}=\binom{8}{2}=28$. و سپس تعداد جواب‌هایی از معادله‌ی (I) را می‌یابیم که در شرایط مسئله صدق نمی‌کنند. با توجه به مجموعه‌های زیر، حاصل عددی عبارت $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2|=|A|-|A_1\cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1=\{(y_1,y_2,x_3)\mid y_1>3\}$$
$$A_2=\{(y_1,y_2,x_3)\mid y_2>2\}$$

در این مرحله $|A_1\cup A_2|$ را به‌دست می‌آوریم. به این منظور باید $|A_1|$ و $|A_2|$ و $|A_1\cap A_2|$ را محاسبه کنیم:

$$y_1>3\Rightarrow y_1\ge 4\Rightarrow\overbrace{y_1-4}^{z_1}\ge 0\Rightarrow\begin{cases}z_1\ge 0\\y_1=z_1+4\end{cases}\quad(3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در معادله‌ی (I) خواهیم داشت:

$$z_1+4+y_2+x_3=6\Rightarrow z_1+y_2+x_3=2$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$y_2 > 2 \Rightarrow y_2 \ge 3 \Rightarrow \overbrace{y_2 - 3}^{z_2} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} z_2 \ge 0 \\ y_2 = z_2 + 3 \end{cases} \quad (4)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۴) در معادله‌ی (I) داریم:

$$y_1 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow y_1 + z_2 + x_3 = 3$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

برای محاسبه‌ی $|A_1 \cap A_2|$ ، کافی رابطه‌های (۳) و (۴) را باهم در معادله‌ی (I) قرار دهیم؛ یعنی:

$$z_1 + 4 + z_2 + 3 + x_3 = 6 \Rightarrow z_1 + z_2 + x_3 = -1$$

$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$ (معادله جواب ندارد)

ملاحظه می‌کنیم که $|A_1| = 6$ ، $|A_2| = 10$ و $|A_1 \cap A_2| = 0$. بنابراین داریم:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2| = |A| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$
$$= 28 - 6 - 10 + 0 = 12$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 25$ را با شرایط $2 \le x_1 \le 7$ ، $3 < x_2 < 11$ و $x_3 > 3$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در معادله انجام می‌دهیم:

$$2 \le x_1 \le 7 \Rightarrow 0 \le \overbrace{x_1 - 2}^{y_1} \le 5 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 2 \\ 0 \le y_1 \le 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$3 < x_2 < 11 \Rightarrow 4 \le x_2 \le 10$$

$$\Rightarrow 0 \le \overbrace{x_2 - 4}^{y_2} \le 6 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = y_2 + 4 \\ 0 \le y_2 \le 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{x_3 - 4}^{y_3} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = y_3 + 4 \\ y_3 \ge 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) در معادله خواهیم داشت:

$$y_1 + 2 + y_2 + 4 + y_3 + 4 = 25 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 15 \quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) باشد، داریم:

$$|A| = \binom{15+3-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$$

اگر مجموعه‌های A_1 و A_2 را به‌صورت زیر در نظر بگیریم، آن‌گاه $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2|$ جواب مسئله است.

$$A_1 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15 \ , \ y_1 \ge 6\}$$
$$= \{(z_1, y_2, y_3) \mid z_1 + y_2 + y_3 = 9 \ , \ z_1 \ge 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 15 \ , \ y_2 \ge 7\}$$
$$= \{(y_1, z_2, y_3) \mid y_1 + z_2 + y_3 = 8 \ , \ z_2 > 0\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$$

$$A_1 \cap A_2 = \{(z_1, z_2, y_3) \mid z_1 + z_2 + y_3 = 2 \ , \ z_1 \ge 0 \ , \ z_2 \ge 0\}$$

$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2| = |A| - |A_1 \cup A_2| = 136 - (55 + 45 - 6) = 42$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۷ مهره‌ی یکسان را درون سه جعبه‌ی متمایز طوری قرار داد که در هر جعبه حداکثر ۴ مهره قرار گیرد؟

حل: فرض کنیم در جعبه‌ی اول x_1 مهره، در جعبه‌ی دوم x_2 مهره و در جعبه‌ی سوم x_3 مهره قرار دهیم. بنابراین داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 (I) \ , \ x_i \le 4 \ , \ i = 1, 2, 3$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله به‌طور مستقیم مقدور نیست، با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به روش غیرمستقیم جواب مسئله را می‌یابیم:

$$x_i \not\le 4 \Rightarrow x_i > 4 \Rightarrow x_i \ge 5 \ , \ i = 1, 2, 3$$

اگر مجموعه‌های A_3, A_2, A_1 را به‌صورت زیر تعریف کنیم آن‌گاه $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3|$ جواب مسأله است.

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ , \ x_1 \ge 5\}$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7 \ , \ x_2 \ge 5\}$$

$$\Rightarrow |A_2| = \binom{4}{2} = 6$$

$$A_3=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=7\ ,\ x_3\geq 5\}$$

$$\Rightarrow |A_3|=\binom{4}{2}=6$$

$$A_1\cap A_2=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=7\ ,\ x_1\geq 5\ ,\ x_2\geq 5\}$$
$$=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=-3\ ,\ x_1\geq 0\ ,\ x_2\geq 0\}$$
$$\Rightarrow |A_1\cap A_2|=0$$

به همین ترتیب:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_3|=0$$

بنابراین داریم:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=|A|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$

اگر A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=7$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$|A|=\binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36$$

بنابراین:

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=36-(6+6+6-0)=18$$

مثال: تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ را با شرایط $-2\leq x_i\leq 3$ و $1\leq i\leq 3$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا تغییر متغیرهای مناسب را با توجه به شرایط مسئله در معادله انجام می‌دهیم:

$$-2\leq x_i\leq 3\Rightarrow 0\leq \overbrace{x_i+2}^{y_i}\leq 5\Rightarrow \begin{cases}x_i=y_i-2\\ 0\leq y_i\leq 5\end{cases}\quad i=1,2,3$$

بنابراین داریم:

$$y_1-2+y_2-2+y_3-2+x_4=15\Rightarrow$$
$$y_1+y_2+y_3+x_4=21\quad (I)$$

در صورتی که A مجموعه‌ی جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (I) باشد، داریم:

$$|A|=\binom{21+4-1}{4-1}=\binom{24}{3}=2024$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله به طور مستقیم مقدور نیست، بنابراین با استفاده از اصل شمول و عدم شمول و به روش غیرمستقیم جواب مسئله را می‌یابیم:

$$0\nleq y_i\nleq 5\Rightarrow y_i>5\Rightarrow y_i\geq 6\ ,\ i=1,2,3$$

اگر مجموعه‌های A_1، A_2 و A_3 را به‌صورت زیر درنظر بگیریم، آن‌گاه $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|$ جواب مسئله است.

$$A_1=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)|y_1+y_2+y_3+x_4=21\ ,\ y_1\geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1|=\binom{15+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_2=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)|y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_2\geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_2|=\binom{15+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_3=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)|y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_3\geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_3|=\binom{25+4-1}{4-1}=\binom{18}{3}=816$$

$$A_1\cap A_2=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)|y_1+y_2+y_3+x_4=21\ ,\ y_1\geq 6,\ y_2\geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1\cap A_2|=\binom{9+4-1}{4-1}=\binom{12}{3}=220$$

به‌همین ترتیب $|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=220$ و هم‌چنین داریم:

$$A_1\cap A_2\cap A_3=\{(y_1,y_2,y_3,x_4)|y_1+y_2+y_3+x_4=21,\ y_1\geq 6,\ y_2\geq 6, y_3\geq 6\}$$

$$\Rightarrow |A_1\cap A_2\cap A_3|=\binom{3+4-1}{4-1}=\binom{6}{3}=20$$

بنابراین داریم:

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$
$$=2024-(816+816+816-220-220-220+20)$$
$$=216$$

در نتیجه، تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4=15$ با شرایط $-2\leq x_i\leq 3$ $(i=1,2,3)$، با تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی $y_1+y_2+y_3+x_4=21$ با شرایط $0\leq y_i\leq 5$ $(i=1,2,3)$ برابر است که تعداد این جواب‌ها ۲۱۶ است.

مسئله: چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ وجود دارد، به‌طوری که مجموع رقم‌های آن برابر با ۲۱ و رقم یکان آن‌ها بیشتر از ۵ باشند؟

حل: فرض کنیم $\overline{a_4a_3a_2a_1}$ عدد چهاررقمی مورد نظر باشد. چون این عدد باید بیشتر از ۲۰۰۰ باشد. بنابراین: $2\leq a_4\leq 9$. از طرف دیگر، باید مجموع رقم‌های این عدد برابر با ۲۱ باشد. بنابراین: $a_1+a_2+a_3+a_4=21\ (I)$. هم‌چنین، رقم یکان این عدد باید بیشتر ۵ باشد، پس: $5<a_1\leq 9$. a_2, a_3 رقم‌های دهگان و صدگان هستند، در این صورت $0\leq a_2\leq 9$ و $0\leq a_3\leq 9$. در نتیجه برای یافتن جواب مسئله باید تعداد

جواب‌های صحیح معادله‌ی (I) را با توجه به شرایط به‌دست آمده، محاسبه کرد.

ابتدا با تغییر متغیرهای مناسب، کران پایین محدوده‌ی متغیرها را به عدد صفر تبدیل می‌کنیم.

$$5 < a_1 \le 9 \Rightarrow 6 \le a_1 \le 9 \Rightarrow 0 \le \overbrace{a_1 - 6}^{y_1} \le 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = y_1 + 6 \\ 0 \le y_1 \le 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$2 \le a_4 \le 9 \Rightarrow 0 \le \overbrace{a_4 - 2}^{y_4} \le 7 \Rightarrow \begin{cases} a_4 = y_4 + 2 \\ 0 \le y_4 \le 7 \end{cases} \quad (2)$$

با قرار دادن رابطه‌های (۱) و (۲) در معادله‌ی (I) داریم:

$$y_1 + 6 + a_2 + a_3 + y_4 + 2 = 21 \Rightarrow$$
$$y_1 + a_2 + a_3 + y_4 = 13 \quad (II)$$

اکنون باید تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ی (II) را با شرایط $0 \le y_1 \le 3$، $0 \le a_2 \le 9$، $0 \le a_3 \le 9$ و $0 \le y_4 \le 7$ محاسبه کرد. به این منظور از اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه استفاده می‌کنیم. اگر A مجموعه جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی (II) باشد، آن‌گاه $|A| = \binom{13+4-1}{4-1} = \binom{16}{3}$.

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$A_1 = \{y_1 \ge 4$ جواب‌های صحیح معادله با شرط$\}$

$A_2 = \{a_2 \ge 10$ جواب‌های صحیح معادله با شرط$\}$

$A_3 = \{a_3 \ge 10$ جواب‌های صحیح معادله با شرط$\}$

$A_4 = \{y_4 \ge 8$ جواب‌های صحیح معادله با شرط$\}$

حالا باید $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ را پیدا کنیم. به این منظور داریم:

$$y_1 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \ge 0 \end{cases} \quad (3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳) در معادله‌ی (II) داریم:

$$z_1 + 4 + a_2 + a_3 + y_4 = 13 \Rightarrow z_1 + a_2 + a_3 + y_4 = 9 \Rightarrow$$

$$|A_1| = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$|A_2| = \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3}, |A_3| = \binom{6}{3},$$

$$|A_4| = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

برای محاسبه‌ی $|A_1 \cap A_2|$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 \ge 4 \Rightarrow \overbrace{y_1 - 4}^{z_1} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 + 4 \\ z_1 \ge 0 \end{cases} \\ a_2 \ge 10 \Rightarrow \overbrace{a_2 - 10}^{z_2} \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = z_2 + 10 \\ z_2 \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

با قرار دادن رابطه‌های اخیر در معادله‌ی (II)، می‌توان $|A_1 \cap A_2|$ را محاسبه کرد:

$$z_1 + 4 + z_2 + 10 + a_3 + y_4 = 13$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 + a_3 + y_4 = -1 \text{ غیرممکن} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 0$$

به همین ترتیب داریم:

$|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 0$ و

$$|A_1 \cap A_4| = \binom{1+4-1}{4-1} = \binom{4}{3}$$

هم‌چنین داریم:

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0 \ ; \ 1 \le i < j < k \le 4$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$$

بنابر اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعه[2] داریم:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

$$= \binom{16}{3} - \left[\binom{12}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{8}{3} - \binom{4}{3}\right]$$

$$= 560 - [220 + 20 + 20 + 56 - 4] = 248$$

***

زیرنویس

۱. فرض کنیم n شیء داشته باشیم که در آن‌ها، k نوع شیء متمایز $(k \le n)$ وجود داشته باشد؛ به‌طوری که n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم، ... و n_k تا از نوع kام باشند و: $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. در این صورت، تعداد تبدیل‌های متمایز این n شیء برابر است با:

$$p_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

۲.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$