

گراف تورنمنت

• احسان یار محمدی

اشاره

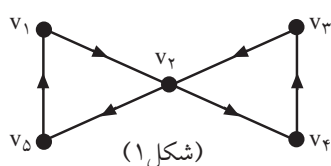
می‌دانیم در طول یک دوره مسابقه‌ی ورزشی که بین تیم‌های شرکت‌کننده در آن دوره مسابقات انجام می‌پذیرد، ممکن است هر تیمی در رویارویی با حریفش، شکست بخورد و یا پیروز شود؛ یا این که در مقابل یکدیگر به نتیجه‌ی تساوی برسند. یکی از روش‌های نمایش این نتایج، استفاده از گراف‌هایی است که در مبحث «نظریه‌ی گراف» کتاب ریاضیات گسسته‌ی دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی، اشاره‌ای از آن‌ها آمده است. اما آن اشاره تنها در اندازه‌ای است که خواننده فقط می‌تواند با استفاده از یک نمودار گراف جهت‌دار و متناظر کردن آن به یک دوره‌ی مسابقه، متوجه برد یا باخت تیم‌ها شود و نمی‌تواند مطالب بیشتری را با استفاده از نمودار آن کسب کند.

موضوع این مقاله، بحث پیشرفته‌ای پیرامون نتیجه‌ی یک دوره مسابقه‌هایی است که بین تیم‌های شرکت‌کننده در آن صورت می‌پذیرد؛ به گونه‌ای که هیچ یک از تیم‌ها مجاز به تساوی در مقابل هم نیستند و هر بازی، در نهایت یک برنده و یک بازنده دارد. این موضوع را به کمک یک دسته از گراف‌های جهت‌دار خاص با ویژگی‌های منحصر به فرد با عنوان «تورنمنت»^۱، بررسی می‌کنیم. برای یادآوری و درک بهتر مقاله اشاره می‌کنم که تورنمنت در لغت به معنای مسابقات قهرمانی و تشکیل مسابقه و در ورزش به معنای یک دوره‌ی مسابقه است. هم‌چنین این مقاله، اشاره‌ای محضی-کاربردی به استفاده از رده‌ای خاص از گراف‌ها به نام «گراف‌های جهت‌دار»^۲ یا «دیگراف»^۳‌ها در یکی از ابعاد زندگی امروزه‌ی بشر به نام ورزش دارد. به همین دلیل، در ابتدا گراف‌های جهت‌دار را معرفی و تعریف‌های مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱

گراف $\vec{G} = (V, \vec{E})$ را که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی و $\vec{E}$ زیرمجموعه‌ای از تمام دوتایی‌های مرتب متشکل از اعضای مجموعه‌ی V است، جهت‌دار می‌نامیم.

مثال ۱. شکل ۱ نمودار گراف جهت‌دار $\vec{G}$ است. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را مشخص کنید.



گراف جهت دار $\vec{G}$ دارای مجموعه ی رأس ها و مجموعه ی یال های زیر است. بنابراین از مرتبه ی $p = 5$ و اندازه ی $q = 6$ خواهد بود.

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_4, v_3), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_5, v_1)\}$$

تعریف ۲

درجه ی ورودی^۴ رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ برابر با تعداد یال های جهت داری است که به رأس v_i وارد می شود که آن را به صورت $\text{in deg}_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳

درجه ی خروجی^۵ رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ برابر با تعداد یال های جهت داری است که از رأس v_i خارج می شود که آن را به صورت $\text{out deg}_{\vec{G}}(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i)$ نمایش می دهیم.

تذکر: بدیهی است که اگر $\text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i)$ عددی زوج^۶ باشند، آن گاه آن ها را به ترتیب رأس ورودی زوج و رأس خروجی زوج و اگر $\text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i)$ یا $\text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i)$ عددی فرد^۷ باشند، آن گاه آن ها را به ترتیب رأس ورودی فرد و رأس خروجی فرد می نامیم.

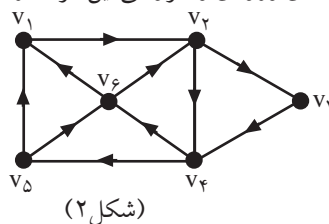
تعریف ۴

بزرگ ترین عدد در بین درجه های رأس های ورودی (خروجی) گراف جهت دار $\vec{G}$ را ماکزیمم درجه ی ورودی (خروجی) می نامیم و آن را با $\Delta^-(\Delta^+)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵

کوچک ترین عدد در بین درجه ی رأس های ورودی (خروجی) گراف جهت دار $\vec{G}$ را مینیمم درجه ی ورودی (خروجی) می نامیم و آن را با $\delta^-(\delta^+)$ نمایش می دهیم.

مثال ۲. شکل ۲ نمودار گراف جهت دار $\vec{G}$ است. ماکزیمم و مینیمم درجه های ورودی و خروجی این گراف را تعیین کنید.



(شکل ۲)

با توجه به نمودار این گراف جهت دار (شکل ۲) داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{deg}^-(v_1) = 2 \\ \text{deg}^-(v_2) = 2 \\ \text{deg}^-(v_3) = 1 \\ \text{deg}^-(v_4) = 2 \\ \text{deg}^-(v_5) = 1 \\ \text{deg}^-(v_6) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^- = 2, \delta^- = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{deg}^+(v_1) = 1 \\ \text{deg}^+(v_2) = 2 \\ \text{deg}^+(v_3) = 1 \\ \text{deg}^+(v_4) = 2 \\ \text{deg}^+(v_5) = 2 \\ \text{deg}^+(v_6) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta^+ = 2, \delta^+ = 1$$

قضیه ی ۱

در گراف جهت دار $\vec{G}$ از مرتبه ی p و اندازه ی q ، رابطه ی

$$\sum_{i=1}^p \text{deg}_{\vec{G}}^-(v_i) = \sum_{i=1}^p \text{deg}_{\vec{G}}^+(v_i) = q$$

برهان

در گراف جهت دار $\vec{G}$ ، هر یال تنها یک جهت دارد به این معنا که دقیقاً به یک رأس از گراف $\vec{G}$ وارد می شود (دقیقاً از یک رأس از گراف $\vec{G}$ خارج می شود). بنابراین در سمت چپ رابطه ی ارائه شده در قضیه، هر یال تنها یک بار به حساب می آید. اکنون که با الفبای تعریف ها و مطالب پیرامون گراف های جهت دار آشنا شدیم، با ارائه ی مثالی، مبحث اصلی مقاله را شروع می کنیم.

فرض کنید در یک دوره ی مسابقه (تورنمنت) فوتبال که نتیجه ی هیچ مسابقه ای نباید به تساوی کشیده شود و در پایان هر بازی باید یک تیم برنده و یک تیم بازنده باشد، چهار تیم سبز، سفید، قرمز و آبی حضور دارند. بعد از این که تمامی تیم ها با یکدیگر پیکار کرده اند، نتایج زیر به دست آمده است:

تیم سفید دو بر یک، تیم سبز را شکست داده است.
تیم قرمز با نتیجه ی سه بر یک، بر حریف خود تیم آبی فائق آمده است.

تیم قرمز بازی را با یک گل خورده، به تیم سفید واگذار کرده است.
تیم سبز با حساب دو بر صفر، بر تیم آبی چیره شده است.
تیم آبی با دو گل خورده، مقابل تیم سفید شکست خورده است.

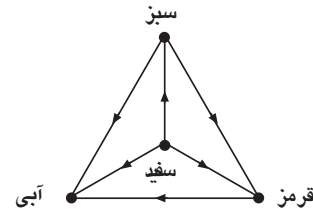
تیم سبز با یک گل زده، بر تیم قرمز برتری یافته است.

بنابر شیوه‌ی امتیازدهی که از سوی فدراسیون جهانی فوتبال (فیفا) ارائه شده است، تیم برنده سه و تیم بازنده صفر امتیاز را بعد از انجام بازی از آن خود می‌کنند. بنابراین بعد از محاسبه‌ی امتیازها، و تعداد گل‌های زده و خورده‌ی هر یک از تیم‌ها، می‌توانیم جدول زیر را برای این دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) ارائه کنیم:

تیم	تعداد بازی	تعداد پیروزی	تعداد شکست	تعداد تساوی	امتیاز	تعداد گل زده	تعداد گل خورده	تفاضل گل
سفید	۳	۳	۰	۰	۹	۵	۱	+۴
سبز	۳	۲	۱	۰	۶	۴	۲	+۲
قرمز	۳	۱	۲	۰	۳	۳	۲	+۱
آبی	۳	۰	۳	۰	۰	۰	۷	-۷

(جدول A)

با استفاده از گراف‌های جهت‌دار نیز می‌توانیم وضعیت این دوره‌ی مسابقه را بررسی کنیم. به این صورت که در صفحه‌ی دکارتی، چهار نقطه متناظر با هر یک از تیم‌های آبی، سفید، سبز و قرمز را در نظر می‌گیریم و برای هر بازی انجام شده بین دو تیم، یال جهت‌داری را از تیم برنده به سمت تیم بازنده رسم می‌کنیم. بنابراین گراف جهت‌داری که نشان‌دهنده‌ی بازی‌های انجام شده و نتایج منتج به پیروزی یا شکست آن‌ها باشد، به صورت شکل ۳ است.



(شکل ۳)

با توجه به گراف جهت‌دار شکل ۳ می‌توانیم، بیشتر اطلاعاتی را که در جدول بنابر قوانین فیفا ارائه شده‌اند، مانند: تعداد بازی، پیروزی، شکست، تساوی و امتیاز هر یک از تیم‌های آبی، سفید، قرمز و سبز را به دست آوریم.

تذکر: با کمی دقت در نمودار گراف جهت‌دار ۳ درمی‌یابیم، این گراف جهت‌دار، گرانی از مرتبه‌ی ۴ $p = 4$ و اندازه‌ی ۶ $q = 6$ است. اکنون اگر یک گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی ۴ $p = 4$ و اندازه‌ی ۶ $q = 6$ را در نظر داشته باشیم، از آن‌جا که در هر گراف کامل K_p با

اندازه‌ی q رابطه‌ی $q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است، بنابراین

گراف ساده‌ی G با مرتبه‌ی ۴ $p = 4$ و اندازه‌ی ۶ $q = 6$ یک گراف کامل K_p است. اگر همین روش را درباره‌ی گراف جهت‌دار مثال بیان شده نیز بررسی کنیم، درخواهیم یافت که این گراف جهت‌دار نیز،

حداکثر یال‌های جهت‌داری ممکن را داراست. البته باید این نکته را نیز مورد توجه قرار دهیم که در گراف کامل K_p با اندازه‌ی q ، درجه‌ی هر رأس برابر با $p-1$ و یا به بیان بهتر، در هر گراف کامل K_p برای ماکزیمم و مینی‌مم درجه‌ی رأس‌ها، رابطه‌ی $\Delta = \delta = p-1$ را داریم. اما در گراف‌های جهت‌داری که حداکثر یال‌های ممکن را دارا هستند، درستی یا نادرستی رابطه‌های $\Delta^- = \delta^-$ یا $\Delta^+ = \delta^+$ و... باید گراف‌های جهت‌دار با مرتبه و اندازه‌های گوناگون را بررسی کرد.

تعریف ۶

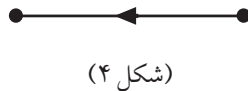
گراف جهت‌دار $\vec{G}$ از مرتبه‌ی P و اندازه‌ی q را که دارای حداکثر یال‌های جهت‌دار است و دقیقاً بین هر دو رأس متمایز آن، یک یال جهت‌دار وجود دارد، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷

گراف کامل K_p با اندازه‌ی q را که یال‌های آن یال‌های جهت‌دار هستند، تورنمنت می‌نامیم و با $\vec{T}_p$ نمایش می‌دهیم.

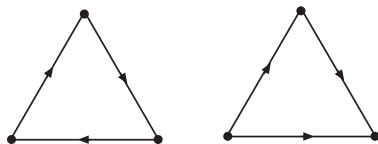
مثال ۳. نمودار تمام تورنمنت‌های متمایز $\vec{T}_3$ ، $\vec{T}_4$ و $\vec{T}_5$ را رسم کنید.

برای تورنمنت $\vec{T}_3$ که در آن مجموعه رأس‌هایش دو عضو دارد، نمودار زیر را می‌توان رسم کرد.



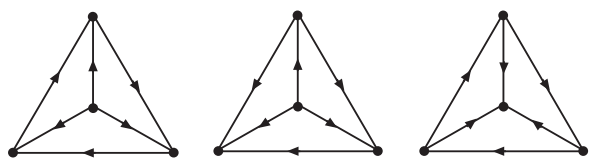
(شکل ۴)

برای تورنمنت $\vec{T}_4$ که در آن مجموعه رأس‌هایش سه عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



(شکل ۵)

برای تورنمنت $\vec{T}_5$ که در آن مجموعه رأس‌هایش چهار عضو دارد، نمودارهای زیر را می‌توان رسم کرد.



(شکل ۶)

قضیه ۲

در تورنمنت $\vec{T}_p$ ، $p \in \mathbb{N}$ با اندازه q رابطه $q = \frac{p(p-1)}{2}$ برقرار است.

برهان

مجموع درجه‌ی رأس‌های ورودی تورنمنت $\vec{T}_p$ به اضافه‌ی مجموع درجه‌ی رأس‌های خروجی تورنمنت $\vec{T}_p$ برابر با $p(p-1)$ است. پس بنابر قضیه ۱، نصف این عدد برابر با تعداد یال‌های تورنمنت $\vec{T}_p$ است.

تعریف ۸

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ را تیم برنده می‌نامیم، اگر $\deg_{\vec{T}}^+(v_i) = \Delta^+$ باشد.

تعریف ۹

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ ، $s_i(v_i) = \deg_{\vec{T}}^+(v_i)$ را امتیازبندی سطح نخست می‌نامیم که به معرفی تیم نخست در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

تعریف ۱۰

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه رأس‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ ، $s_i(v_i) = \sum_{v_j \in E_{\vec{T}}} s_i(v_j)$ ، $1 \leq i \leq p$ ، v_i را امتیازبندی سطح دوم می‌نامیم که به معرفی تیم دوم در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

تعریف ۱۱

در تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ و مجموعه یال‌های $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_q\}$ برای تیم متناظر با رأس v_i ، $1 \leq i \leq p$ ، $s_n(v_i) = \sum_{v_j \in E_{\vec{T}}} s_{n-1}(v_j)$ ، $1 \leq i \leq p$ امتیازبندی سطح n -ام می‌نامیم که به معرفی تیم n -ام در رتبه‌بندی منجر می‌شود.

مثال ۴. در یک دوره‌ی مسابقه‌ی فوتبال دوستانه که بین شش تیم آژاکس، منچستر یونایتد، بایرن مونیخ، لیون، رئال مادرید و یوونتوس برگزار شده است، بعد از تمام بازی‌ها، نتایج زیر به دست آمده‌اند:
- تیم لیون مقابل تیم‌های یوونتوس، آژاکس و رئال مادرید به پیروزی

تذکر: می‌دانیم براساس قوانین فدراسیون جهانی فوتبال، تیم‌های شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت)، براساس امتیازاتی که به دست آورده‌اند، رتبه‌بندی می‌شوند. در پاره‌ای از موارد ممکن است دو یا چند تیم شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه، امتیازات یکسان و مشابهی را به دست آورده باشند که در این صورت فیفا تفاضل گل آن‌ها را بررسی می‌کند و تیمی که نسبت به سایر تیم‌ها تفاضل گل بهتری داشته باشد، در رتبه‌ی بالاتر قرار می‌گیرد. اگر تفاضل گل دو یا چند تیم نیز با یکدیگر برابر باشد، آن‌گاه فیفا به سراغ تعداد گل‌های زده‌ی تیم‌ها، و در صورت برابری آن، به سراغ گل خورده‌ی تیم‌های شرکت‌کننده می‌رود و براساس آن‌ها رتبه‌بندی صورت می‌پذیرد.

اگر آگاهی‌های ما از نتایج بازی‌های انجام شده، تنها شامل نتیجه‌ی برد یا باخت تیم‌ها نباشد و در برگیرنده‌ی نتیجه‌ی بازی با تعداد گل‌های زده و خورده باشد، آن‌گاه مانند مثالی که قبلاً ارائه شد، می‌توانیم با تشکیل یک جدول، تیم‌های حاضر در آن دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) را رتبه‌بندی کنیم. اما اگر اطلاعات ما تنها شامل نتیجه‌ی باخت یا برد تیم‌ها در مقابل یکدیگر باشد، به این علت که ممکن است تعداد پیروزی‌ها یا شکست‌های دو یا چند تیم با یکدیگر برابر باشد و از آن‌جا که ما نیز از تعداد گل‌های ردوبدل شده‌ی بین آن‌ها بی‌اطلاع هستیم، کار ما برای رتبه‌بندی تیم‌ها مقداری مشکل خواهد شد. به همین دلایل، در زیر چند

تعریف را درباره‌ی تورنمنت $\vec{T}_p$ با مجموعه رأس‌های $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$ بیان می‌کنیم تا بتوانیم در رتبه‌بندی تیم‌های شرکت‌کننده در یک دوره‌ی مسابقه (تورنمنت) صرفاً با آگاهی داشتن از نتیجه‌ی برد یا باخت تیم‌ها، اظهارنظر کنیم.



دفتر انتشارات کمک آموزشی

آشنایی با مجله های رشد

مجله های رشد توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وابسته به وزارت آموزش و پرورش، با این عناوین تهیه و منتشر می شوند:

مجله های دانش آموزی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر سال تحصیلی - منتشر می شوند):

- **رشد کودک** (برای دانش آموزان آمادگی و پایه ی اول دوره ی ابتدایی)
- **رشد نوآموز** (برای دانش آموزان پایه های دوم و سوم دوره ی ابتدایی)
- **رشد دانش آموز** (برای دانش آموزان پایه های چهارم و پنجم دوره ی ابتدایی).
- **رشد نوجوان** (برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی).
- **رشد جوان** (برای دانش آموزان دوره ی متوسطه).

مجله های عمومی (به صورت ماهنامه - ۸ شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شوند):

- **رشد آموزش ابتدایی، رشد آموزش راهنمایی تحصیلی، رشد تکنولوژی آموزشی، رشد مدرسه فردا، رشد مدیریت مدرسه**
- **رشد معلم (دو هفته نامه)**

مجله های تخصصی (به صورت فصلنامه و ۴ شماره در سال منتشر می شوند):

- **رشد برهان راهنمایی** (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی تحصیلی)، **رشد برهان متوسطه** (مجله ی ریاضی، برای دانش آموزان دوره ی متوسطه)، **رشد آموزش معارف اسلامی، رشد آموزش جغرافیا، رشد آموزش تاریخ، رشد آموزش زبان و ادب فارسی، رشد آموزش زبان، رشد آموزش زیست شناسی، رشد آموزش تربیت بدنی، رشد آموزش فیزیک، رشد آموزش شیمی، رشد آموزش ریاضی، رشد آموزش هنر، رشد آموزش قرآن، رشد آموزش علوم اجتماعی، رشد آموزش زمین شناسی، رشد آموزش فنی و حرفه ای، رشد مشاور مدرسه.**

مجله های رشد عمومی و تخصصی برای معلمان، آموزگاران، مدیران و کادر اجرایی مدارس دانشجویان مراکز تربیت معلم و رشته های دبیری دانشگاه ها و کارشناسان تعلیم و تربیت تهیه و منتشر می شوند.

● **نشانی: تهران، خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸، دفتر انتشارات کمک آموزشی.**

تلفن و نمابر: ۸۸۳۰۱۴۷۸

v_4, v_5, v_6 درجه ی خروجی تعیین و به پیروی از آن، تیم نخست را در رتبه بندی مشخص کنیم. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \deg^+(v_1) = 4 \\ \deg^+(v_2) = 3 \\ \deg^+(v_3) = 3 \\ \deg^+(v_4) = 2 \\ \deg^+(v_5) = 2 \\ \deg^+(v_6) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s_1(v_1) = 4 \\ s_1(v_2) = 3 \\ s_1(v_3) = 3 \\ s_1(v_4) = 2 \\ s_1(v_5) = 2 \\ s_1(v_6) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(s_1) = s_1(v_1) = 4$$

در نتیجه، تیم متناظر با رأس v_1 این تورنمنت، یعنی تیم رئال مادرید، پس از پایان بازی ها در رده ی نخست قرار گرفته است. با اندکی دقت در مقدار $s_1(v_i), 1 \leq i \leq 6$ درمی یابیم، $s_1(v_2) = s_1(v_3) = s_1(v_4) = 3$ بعد از مقدار $s_1(v_1) = 4$ بیشترین مقدار را به خود اختصاص داده اند. ولی این سؤال در ذهن ما پدیدار می شود که کدام یک از تیم های متناظر با رأس های v_2, v_3, v_4 در جایگاه دوم رتبه بندی قرار می گیرد. به همین دلیل، به محاسبه ی $s_2(v_i), 1 \leq i \leq 6$ می پردازیم، بنابراین:

$$\begin{aligned} s_2(v_1) &= \sum_{v_j \in E_{-1}} s_1(v_j), 1 \leq j \neq 1 \leq 6 \\ &= s_1(v_2) + s_1(v_3) + s_1(v_4) + s_1(v_5) + s_1(v_6) = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 \\ s_2(v_2) &= \sum_{v_j \in E_{-2}} s_1(v_j), 1 \leq j \neq 2 \leq 6 = s_1(v_1) + s_1(v_4) + s_1(v_6) \\ &= 2 + 2 + 1 = 5 \\ s_2(v_3) &= \sum_{v_j \in E_{-3}} s_1(v_j), 1 \leq j \neq 3 \leq 6 = s_1(v_1) + s_1(v_2) + s_1(v_4) \\ &= 4 + 3 + 2 = 9 \end{aligned}$$

رسیده و در مقابل تیم های بایرن مونیخ و منچستر یونایتد متحمل شکست شده است.

- تیم منچستر یونایتد تیم های بایرن مونیخ و لیون را شکست داده و مقابل تیم های رئال مادرید، یوونتوس و آژاکس نتیجه را واگذار کرده است.

- تیم رئال مادرید در مقابل تیم های بایرن مونیخ، یوونتوس، منچستر یونایتد و آژاکس بازی را به سود خود به پایان رسانده و در مقابل تیم لیون متحمل شکست شده است.

- تیم یوونتوس در بازی با تیم های منچستر یونایتد، آژاکس و بایرن مونیخ پیروز از میدان خارج شده و در مقابل تیم های رئال مادرید و لیون، تن به شکست داده است.

- تیم آژاکس در رویارویی با تیم های لیون، یوونتوس و رئال مادرید دچار باخت شده و در مقابل تیم های منچستر یونایتد و بایرن مونیخ، نتیجه را از آن خود کرده است.

- تیم بایرن مونیخ در پیکار با تیم های رئال مادرید، منچستر یونایتد، آژاکس و یوونتوس، شکست را پذیرفته و در رویارویی با تیم لیون موفق به کسب پیروزی شده است.

با استفاده از تورنمنت ها، در مورد رتبه بندی تیم های شرکت کننده در این دوره مسابقات بحث کنید.

اگر وضعیت رویارویی این شش تیم در مصاف با یکدیگر را به کمک گراف های جهت دار بررسی کنیم، نمودار متناظر

با این دوره مسابقات، یک تورنمنت T_6 با مجموعه رأس های

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ و اندازه ی $q = 15$ خواهد شد.

بنابراین، به هریک از تیم های رئال مادرید، یوونتوس، لیون، آژاکس، منچستر یونایتد و بایرن مونیخ، به ترتیب رأس های

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ را نظیر می کنیم. اکنون با توجه به آن چه که در مثال در مورد نتایج بازی های انجام شده، آمده

است، می توانیم برای هریک از رأس های $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

$$s_r(v_f) = \sum_{v_j v_i \in E_{\rightarrow}^T} s_r(v_j), 1 \leq j \neq f \leq 6 = s_r(v_d) + s_r(v_e) = 4 + 3 = 7$$

$$s_r(v_e) = \sum_{v_j v_i \in E_{\rightarrow}^T} s_r(v_j), 1 \leq j \neq e \leq 6 = s_r(v_r) = 3$$

در نتیجه، تیم متناظر با رأس v_f که همان تیم آژاکس است، در رتبه ی پنجم و تیم متناظر با رأس v_e یعنی تیم بایرن مونیخ، در مکان ششم رتبه بندی قرار می گیرد.

$$s_r(v_f) = \sum_{v_j v_i \in E_{\rightarrow}^T} s_1(v_j), 1 \leq j \neq f \leq 6 = s_1(v_d) + s_1(v_e) = 2 + 1 = 3$$

$$s_r(v_d) = \sum_{v_j v_i \in E_{\rightarrow}^T} s_1(v_j), 1 \leq j \neq d \leq 6 = s_1(v_r) + s_1(v_e) = 3 + 1 = 4$$

$$s_r(v_e) = \sum_{v_j v_i \in E_{\rightarrow}^T} s_1(v_j), 1 \leq j \neq e \leq 6 = s_1(v_r) = 3$$

در نتیجه:

$$\left. \begin{array}{l} s_r(v_1) = 8 \\ s_r(v_2) = 5 \\ s_r(v_3) = 9 \\ s_r(v_f) = 3 \\ s_r(v_d) = 4 \\ s_r(v_e) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \max(s_r) = s_r(v_3) = 9$$

بنابراین، تیم متناظر با رأس v_3 این تورنمنت، یعنی تیم لیون، پس از پایان بازی ها در رده ی دوم، و تیم متناظر با رأس v_2 این تورنمنت، یعنی تیم یوونتوس، در رتبه ی سوم قرار گرفته است. از آن جا که تکلیف رتبه بندی تیم های متناظر با رأس های v_1 ، v_f و v_4 مشخص شده است، بنابراین با اندکی دقت در مقدار $s_r(v_i)$ ، $s_r(v_1) = 8$ و $s_r(v_2) = 5$ و $s_r(v_3) = 9$ و $s_r(v_f) = 3$ و $s_r(v_d) = 4$ و $s_r(v_e) = 3$ هستند. در نتیجه، تیم متناظر با رأس v_5 یعنی تیم منچستر یونایتد، در رتبه بندی مقام چهارم را به دست آورده است. اما به این دلیل که داریم: $s_r(v_f) = 3$ و $s_r(v_e) = 3$ لذا برای تشخیص این که چه تیمی در رتبه ی پنجم و کدام تیم در جایگاه ششم قرار می گیرد، باید به محاسبه ی $s_r(v_i)$ ، برای $i = 4, 6$ پردازیم. بنابراین:

زیرنویس

1. Tournament
2. Directed Graphs
3. Digraph
4. Indegree
5. Outdegree
6. Even
7. Odd
8. Ranking

منبع

1. <http://mathworld.wolfram.com>
2. <http://www.fifa.com>
3. <http://www.graphtheory.com>



برگ اشتراک مجله های رشد

شرایط

- ۱- واریز مبلغ ۲۰/۰۰۰ ریال به ازای هر عنوان مجله درخواستی، به صورت علی الحساب به حساب شماره ی ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارت شعبه سه راه آزمایش (سرخه حصار) کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست.
- ۲- ارسال اصل رسید بانکی به همراه برگ تکمیل شده اشتراک.

- نام مجله:
- نام و نام خانوادگی:
- تاریخ تولد:
- میزان تحصیلات:
- تلفن:
- نشانی کامل پستی:
- استان:
- شهرستان:
- خیابان:
- پلاک:
- کدپستی:

- مبلغ واریز شده:
- شماره و تاریخ رسید بانکی:

امضا:

نشانی: تهران - صندوق پستی مشترکین
www.roshdmag.ir
نشانی اینترنتی:
پست الکترونیک:
Email: info@roshdmag.ir
شماره مشترکین:
۷۷۳۳۶۶۵۶ - ۷۷۳۳۵۱۱۰

پیام گیر مجلات رشد:
۸۸۳۰۱۴۸۲ - ۸۸۳۹۴۳۲

یادآوری:
هرزینه برگشت مجله در صورت خوانا و کامل نبودن نشانی، بر عهده مشترک است.

منای شروع اشتراک مجله از زمان وصول برگ اشتراک است.
برای هر عنوان مجله برگ اشتراک جداگانه تکمیل و ارسال کنید (تصویر برگ اشتراک نیز مورد قبول است).