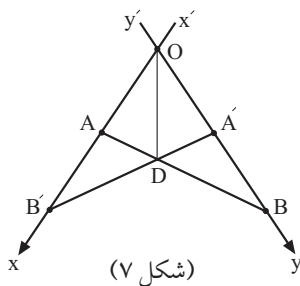


یک به یک بین  $x$  و  $y$  است و اگر به  $x$  یک مقدار بدهیم، برای  $y$  تنها یک مقدار حاصل می‌شود، اما اگر به  $y$  یک مقدار نسبت بدهیم، برای  $x$  سه مقدار حاصل می‌شود. مثلاً اگر به  $y$  عدد ۱ را نسبت بدهیم، برای  $x$  سه مقدار حاصل می‌شود، زیرا معادله‌ی  $x^3 = 1$ ، سه جواب دارد. یک جواب  $x = 1$  است و دو جواب دیگر، جواب‌های معادله‌ی  $x^2 + x + 1 = 0$  هستند. دو جواب معادله‌ی اخیر مختلط هستند. در معادله‌ی ۶، دو متغیر  $x$  و  $y$  اعداد حقیقی‌اند، زیرا هر دو اندازه‌های جبری دو بردار روی دو محورهای  $x'x$  و  $y'y$  هستند. با توضیحات یاد شده می‌گوییم که تنها صورت برای معادله‌ی ۵، همان معادله‌ی ۶ است.



### دستور فشرده برای محاسبه‌ی نیم‌سازهای داخلی و خارجی

دو محور  $x'ox$  و  $y'oy$  و خط  $OD$  نیم‌ساز زاویه‌ی  $xoy$  را در نظر می‌گیریم (شکل ۷). نقطه‌ی دل‌خواه  $A$  را روی محور  $x'ox$  در نظر می‌گیریم و آن را به نقطه‌ی  $D$  وصل می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد خط  $AD$  و محور  $y'oy$  را  $B$  می‌نامیم. اندازه‌های جبری دو بردار  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$  را روی محورهای  $x'x$  و  $y'y$  به ترتیب  $x$  و  $y$  می‌نامیم. چون به هر نقطه‌ی  $A$  از محور  $x'x$  یک و تنها یک نقطه از محور  $y'y$  نسبت داده می‌شود و برعکس، پس بین دو متغیر  $x$  و  $y$  رابطه‌ی یک به یک

$$f(x, y) = 0 \quad (5)$$

وجود دارد. معادله‌ی ۵ (در مقاله‌ی شماره‌ی قبل) به صورت زیر است:

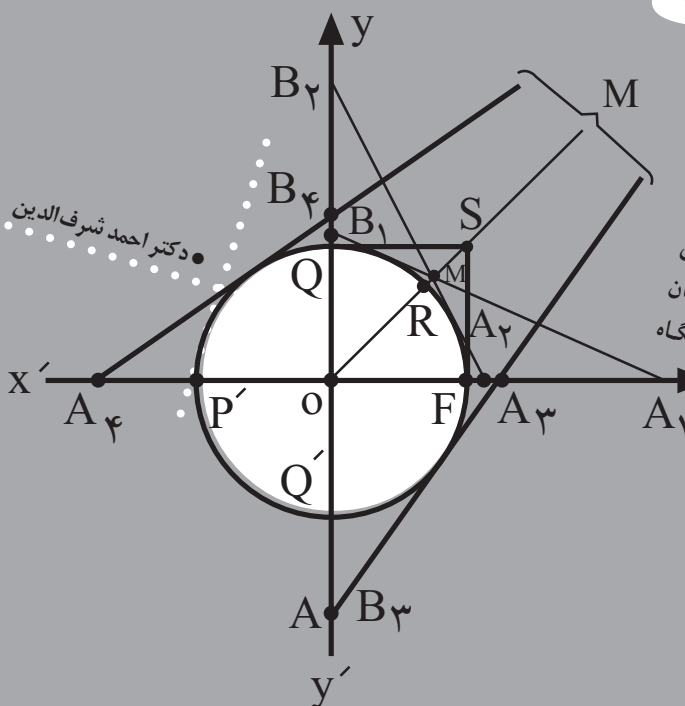
$$axy + bx + cy + d = 0 \quad (6)$$

توجه شود که در رابطه‌ی ۶،  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی‌اند، زیرا هر دو اندازه‌های جبری دو بردار روی محورهای  $x'x$  و  $y'y$  هستند. بنابراین نباید چنین تصور شود که رابطه‌ی  $y = x^3$ ، رابطه‌ی

# حل هندسی چند معادله (۲)

## اشاره

در شماره‌ی قبل چند معادله را به کمک هندسه حل کردیم. اینک در ادامه‌ی مقاله‌ی قبل ابتدا دستور فشرده برای محاسبه‌ی نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث را بیان می‌کنیم. سپس به حل هندسه‌ی دستگاه معادلات می‌پردازیم.



اکنون ضریب‌های معادله ی ۶ را تعیین می‌کنیم:

(الف) اگر نقطه ی A بر نقطه ی O منطبق شود، آن‌گاه نقطه ی B بر نقطه ی O منطبق می‌شود. پس اگر در معادله ی ۶، مقدار x برابر صفر شود، آن‌گاه مقدار y مساوی صفر می‌شود. از این مطلب نتیجه می‌شود که  $d = 0$  و لذا معادله ی ۶ به صورت زیر است:

$$axy + bx + cy = 0 \quad (۷)$$

(ب) اگر بر محور  $y'y$  نقطه ی A' را چنان اختیار کنیم که  $\overline{OA'} = \overline{OA}$  باشد و نقطه ی برخورد خط  $DA'$  را با محور  $x'x$  به B' نمایش دهیم، چنین داریم  $\overline{OB'} = \overline{OB}$  نتیجه می‌شود که در رابطه ی ۶،  $b = c$  است. با توجه به تساوی اخیر، رابطه ی ۶ به صورت زیر است:

$$axy + b(x + y) = 0 \quad (۸)$$

رابطه ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{a}{b} \quad (۹)$$

توجه: اگر دو طرف معادله ی ۸ را بر xy بخش کنیم، معادله ی ۹ حاصل می‌شود. اما بررسی بخش کردن دو طرف معادله ی ۸ بر xy باید xy مخالف صفر باشد و این شرط در مسئله ی مورد نظر برقرار است. زیرا تساوی  $xy = 0$  هنگامی محقق می‌شود که x یا y یا هر دو صفر شوند. در مسئله ی مورد نظر ما، xy هنگامی صفر می‌شود که طول‌های دو ضلع OA و OB از مثلث OAB صفر باشند. اما چنین حالتی در مسئله پیش نمی‌آید، زیرا ما می‌خواهیم در مثلث OAB رابطه ی بین طول‌های دو ضلع OA و OB و طول نیم‌ساز OD را حساب کنیم. مثلی که طول‌های دو ضلع آن صفر باشند، معنی ندارد.

(پ) اکنون در معادله ی ۹، مقدار  $-\frac{a}{b}$  را حساب می‌کنیم. برای این منظور، یک حالت خاص در نظر می‌گیریم. یک حالت خاص مناسب آن است که  $\overline{OA} = \overline{OB}$  باشد. یک حالت خاص مناسب دیگر آن است که نقطه ی A را روی محور  $x'x$  در جایی بگیریم که خط موازی Oy باشد. در این حالت، مقدار  $\overline{OB}$  مساوی بی‌نهایت می‌شود.

حالت خاص اول را در نظر می‌گیریم. اگر  $\overline{OA} = \overline{OB}$  باشد، تساوی ۹ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{2}{\overline{OA}} = -\frac{a}{b} \quad (۱۰)$$

در حالت  $\overline{OA} = \overline{OB}$  مثلث OAD در رأس A قائم‌الزاویه

می‌شود و چنین داریم:

$$\overline{OA} = \frac{\overline{OD}}{\cos \frac{O}{2}} = \frac{b}{\cos \frac{O}{2}} \quad (۱۱)$$

از دو رابطه ی ۱۰ و ۱۱ نتیجه می‌شود:

$$-\frac{a}{b} = \frac{2 \cos \frac{O}{2}}{b} \quad (۱۲)$$

معادله ی ۹ با رعایت تساوی ۱۲ به صورت زیر درمی‌آید:

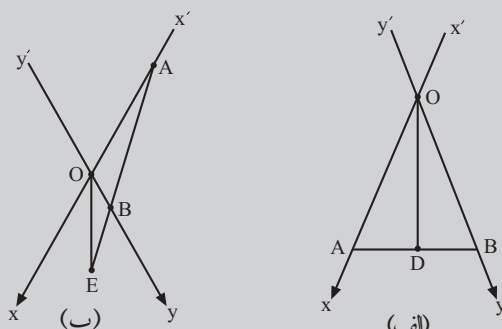
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2 \cos \frac{O}{2}}{b} \quad (۱۳)$$

نیم‌ساز داخلی مثلث: مثلث OAB را که در آن OD نیم‌ساز داخلی است، در نظر می‌گیریم (شکل ۸-الف). در این مثلث، رابطه ی ۱۳ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{2 \cos \frac{O}{2}}{\overline{OD}}$$

نیم‌ساز خارجی مثلث: مثلث OAB را که در آن OE نیم‌ساز خارجی است، در نظر می‌گیریم (شکل ۸-ب). در این مثلث، رابطه ی ۱۳ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{\overline{OB}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{2 \cos \frac{O}{2}}{\overline{OE}}$$



(شکل ۸)

### حل هندسی دستگاه معادلات

در مثلث قائم‌الزاویه ی ABC که A رأس زاویه ی قائمه است، رابطه ی بین دو ضلع زاویه ی قائمه و ارتفاع AH و نیز رابطه ی بین دو ضلع زاویه ی قائمه و نیم‌سازهای داخلی و خارجی را (در این مقاله و شماره ی قبل) مطرح و اثبات کردیم. اکنون رابطه‌های یاد شده را برای حل دستگاه معادلات زیر به کار می‌بریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b} \end{cases} \quad (۱۴)$$

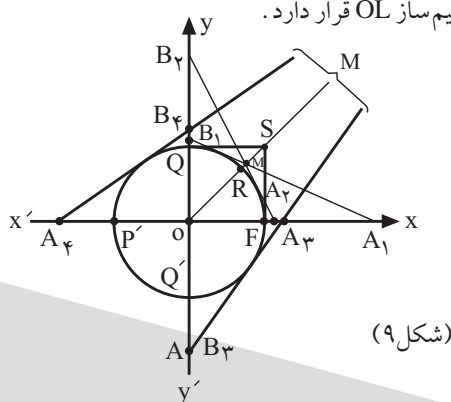
این دستگاه معادلات را در حالت  $b > 0$  حل می‌کنیم. اگر  $b < 0$  باشد، دو طرف معادله ی دوم را در  $-1$  ضرب می‌کنیم و قرار می‌دهیم:  $-x = X$  و  $-y = Y$ .

آن گاه دستگاه معادلات ۱۴ به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{cases} \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{b} \end{cases} \quad (۱۵)$$

دستگاه معادلات (۱۵) مانند دستگاه معادلات ۱۴ است.

برای حل هندسی دستگاه معادلات ۱۴، دو محور عمود بر هم  $x'ox$  و  $y'oy$  را در نظر می گیریم (شکل ۹). نقاط برخورد محور  $x'x$  دایره  $O$  را  $P$  و  $P'$  و نقاط برخورد محور  $y'y$  دایره  $O$  را  $Q$  و  $Q'$  می نامیم. نقطه  $R$  برخورد خط  $OL$  (نیم ساز زاویه  $xoy$ ) را با دایره  $O$ ، با  $R$  نشان می دهیم و نقطه  $S$  برخورد مماس های رسم شده بر دایره  $O$  در نقاط  $P$  و  $Q$  را  $S$  می نامیم. نقطه  $S$  روی نیم ساز  $OL$  قرار دارد.



(شکل ۹)

نقطه  $M$  را روی نیم ساز  $OL$  در جایی اختیار می کنیم که  $\overline{OM} = \sqrt{2}b$  باشد (مقدار  $\sqrt{2}b$  برای  $\overline{OM}$  با توجه به دو

معادله  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{b}$  و  $\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OB}} = \frac{\sqrt{2}}{b}$  به دست می آید.

یادآوری می کنیم که  $\overline{OA}$  و  $\overline{OB}$  اعداد جبری اند.

بر حسب مقدارهای  $\overline{OM}$  چهار حالت پیش می آید:

(الف) اگر نقطه  $M$  بین دو نقطه  $R$  و  $S$  باشد، یعنی  $a < \overline{OM} < a\sqrt{2}$ ، در این مورد از نقطه  $M$  می توان دو مماس بر دایره  $O$  رسم کرد که آن ها را  $A_1B_1$  و  $A_2B_2$  می نامیم. وقتی نقطه  $M$  بین دو نقطه  $R$  و  $S$  باشد، خط  $OM$  نیم ساز داخلی در دو مثلث قائم الزاویه  $OA_1B_1$  و  $OA_2B_2$  است. در این حالت جواب های دستگاه معادلات چنین اند:

$$\begin{cases} x = \overline{OA_1} \\ y = \overline{OB_1} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \overline{OA_2} \\ y = \overline{OB_2} \end{cases}$$

هر دو جواب مثبت اند.

(ب) اگر نقطه  $M$  روی نیم خط باز  $SL$  قرار گیرد، یعنی:  $\overline{OM} > \overline{OS}$ ، در این صورت  $\overline{OM} > a\sqrt{2}$  و می توان از نقطه  $M$  دو مماس بر دایره  $O$  رسم کرد که آن ها را  $A_3B_3$  و  $A_4B_4$  می نامیم. جواب های دستگاه معادلات ۱۴، وقتی  $\overline{OM} > a\sqrt{2}$  باشند، چنین است:

$$\begin{cases} x = \overline{OA_3} > 0 \\ y = \overline{OB_3} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \overline{OA_4} < 0 \\ y = \overline{OB_4} > 0 \end{cases}$$

(پ) اگر  $OM = a$  باشد، یعنی نقطه  $M$  روی دایره  $O$  باشد، از نقطه  $M$  تنها یک مماس بر دایره رسم می شود. (وقتی نقطه  $M$  روی پاره خط  $RS$  به سوی نقطه  $R$  بی نهایت نزدیک شود، دو نقطه  $A_1$  و  $A_2$  بی نهایت به هم نزدیک می شوند. پس دو مماس  $MA_1$  و  $MA_2$  بی نهایت به هم نزدیک می شوند. وقتی نقطه  $M$  بر نقطه  $R$  منطبق شود، مماس مضاعف داریم.) با این ملاحظات، وقتی  $\overline{OM} = a$  باشد، دستگاه معادلات ۱۴ دارای جواب مضاعف زیر است:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{2} \\ y = a\sqrt{2} \end{cases}$$

(ت) اگر  $\overline{OM} = a\sqrt{2}$  باشد، یعنی نقطه  $M$  بر نقطه  $S$  قرار گیرد، چنین می گوئیم:

وقتی نقطه  $M$  به نقطه  $S$  بی نهایت نزدیک شود، آن گاه مقدار  $\overline{OA_1}$  بی نهایت به  $a$  نزدیک و مقدار  $\overline{OB_1}$  بی نهایت بزرگ می شود (از حیث قدر مطلق). از روی شکل نتیجه می شود:

$$x_{A_1} \rightarrow a \Rightarrow y_{B_1} \rightarrow \infty$$

$$x_{A_2} \rightarrow \infty \Rightarrow y_{B_2} \rightarrow a$$

برای دستگاه معادلات ۱۴ چنین داریم:

$$\begin{cases} x \rightarrow a \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \quad \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a \end{cases}$$

مسئله: معادله  $y$  زیر را حل کنید:

$$a \cos x + b \sin x = c$$

معادله را با فرض  $c > 0$  حل می کنیم. اگر  $c < 0$  باشد، دو طرف معادله را در  $-1$  ضرب می کنیم تا مقدار سمت راست معادله مثبت شود.

راهنمایی برای حل. شکل ۱۰ راهنما برای حل است.

بر دو محور عمود بر هم  $u'ou$  و  $v'ov$  به ترتیب دو بردار  $\vec{AO}$  و  $\vec{OB}$  را با اندازه های جبری  $a$  و  $b$  اختیار می کنیم. نقطه  $C$  محل برخورد دایره  $AB$  به قطر  $AB$  و دایره  $O$  به مرکز  $A$  و شعاع به اندازه  $C$  است.

مقدار جواب معادله: اندازه  $CAO$  زاویه  $x$

شرط وجود جواب:  $AC \leq AB$ ، یعنی:  $c^2 \leq a^2 + b^2$

