کاربردهایی از قضیه‌ی لاگرانژ (۲)

● ابراهیم دارابی

اشاره

در شماره‌ی قبل قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج حاصل از آن را مطرح کردیم. همچنین کاربرد این قضیه و نتایج آن را در اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی در قالب چند مثال دیدید. اینک در پی بقیه‌ی آن مثال‌ها را می‌آوریم.

مثال 11. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\operatorname{Arc\cos}\frac{2x}{x^2+1}=\begin{cases}\pi-\operatorname{Arc\sin}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1)\\[2mm] \pi+\operatorname{Arc\sin}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[-1,0)\\[2mm] -\operatorname{Arc\sin}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[0,1)\\[2mm] \operatorname{Arc\sin}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

اثبات: دیده می‌شود:

$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1\ ,\ \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\le 1$$

و به ازای هر x حقیقی، توابع:

$$f(x)=\operatorname{Arc\cos}\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ g(x)=\operatorname{Arc\sin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

روی محور اعداد پیوسته هستند و داریم:

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}}\times\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$$

$$=\frac{-(x^2+1)}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\times\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\times\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x^2}}\times\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اکنون به این ترتیب عمل می‌کنیم:

1. در بازه‌ی $(-\infty,-1)\cup(0,1)$، تابع $F(x)=f(x)+g(x)$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$F'(x)=f'(x)+g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}+\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x\in(-\infty,-1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=x^2-1\ ,\ |x|=-x\Rightarrow F'(x)=0$$

اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=-(x^2-1)\ ,\ |x|=x\Rightarrow F'(x)=0$$

$$\Rightarrow F(x)=c$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arc\cos}\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc\sin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=c$$

در هر یک از بازه‌های بالا، برای پیدا کردن c قرار می‌دهیم $x=-\sqrt{3}$ و $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. از آن‌جا داریم:

$$F(-\sqrt{3})=\operatorname{Arc\cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{Arc\sin}\left(\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi$$

$$\Rightarrow c=\pi$$

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\operatorname{Arc\cos}\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{Arc\sin}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$$

پس اگر $x\in(-\infty,-1)$. آن‌گاه:

$$\operatorname{Arc\cos}\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc\sin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\pi$$

و اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arc\cos}\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc\sin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$$

2. تابع $G(x)=f(x)-g(x)$ را درنظر می‌گیریم که در آن $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

$$G(x)=\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$G'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{\left|x^2-1\right|(x^2+1)}-\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x\in(-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$\left|x^2-1\right|=-(x^2-1)\ ,\ |x|=-x\Rightarrow G'(x)=0$$

اگر $x\in(1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$\left|x^2-1\right|=x^2-1\ ,\ |x|=x\Rightarrow G'(x)=0$$

پس در بازه‌ی مفروض، تابع $G(x)$ ثابت است. یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=c$$

قرار می‌دهیم $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x=\sqrt{3}$. نتیجه می‌شود:

$$G(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{2})=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi$$

$$\Rightarrow c=\pi$$

$$G(\sqrt{3})=\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$$

پس اگر $x\in(-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\pi$$

و اگر $x\in(1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$$

۳. به ازای $x=\pm1$ و $x=0$ مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-1)=\operatorname{Arccos}(-1)=\pi\ ,\ g(-1)=\operatorname{Arcsin}0=0$$

پس به ازای $x=-1$ داریم: $f(x)=\pi+g(x)$ ، یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}=\pi+\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$g(0)=\operatorname{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}\ ,\ f(0)=\operatorname{Arccos}0=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین به ازای $x=0$ داریم:

$$f(x)=-g(x)\Rightarrow\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}=-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$f(1)=\operatorname{Arccos}1=0\ ,\ g(1)=\operatorname{Arcsin}0=0$$

بنابراین به ازای $x=1$ داریم:

$$f(x)=g(x)=\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}=\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

بنابراین، اتحاد مفروض به ازای هر مقدار حقیقی x برقرار است.

مثال ۱۲. عبارت زیر را به صورت حاصل ضرب بنویسید:

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$$

حل: عبارت بالا را به عنوان تابعی از متغیر x در نظر می‌گیریم (y و z را مقادیر ثابت درنظر می‌گیریم):

$$f(x)=x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$$

مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f'(x)&=y^2-z^2-2xy+2xz=(y^2-z^2)-2x(y-z)\\&=(y-z)(y+z)-2x(y-z)\\&=(y-z)(y+z-2x)\end{aligned}$$

فرض کنیم $(y-z)(y+z-2x)$ مشتق تابع دیگری مانند $g(x)$ باشد:

$$g'(x)=(y-z)((y+z)-2x)$$

$$\Rightarrow g(x)=(y-z)((y+z)x-x^2)$$

چون $f(x)$ و $g(x)$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر هستند، و داریم:

$$f'(x)=g'(x)$$

پس بنابر نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) داریم:

$$f(x)=g(x)+c$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. داریم:

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$$
$$=(y-z)((y+z)x-x^2)+c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x=0$. از آن‌جا:

$$c=yz^2-zy^2$$

بنابراین داریم:

$$f(x)=g(x)+yz^2-zy^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x)&=(y-z)((y+z)x-x^2)+yz^2-zy^2\\&=(y-z)(xy+xz-x^2)-yz(y-z)\\&=(y-z)(xy-x^2+xz-yz)\end{aligned}$$

$$= (y-z)(x(y-x)-z(y-x))$$
$$= (y-z)(y-x)(x-z)$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x(y^{۲}-z^{۲})+y(z^{۲}-x^{۲})+z(x^{۲}-y^{۲})$$
$$=(y-z)(y-x)(x-z)$$

مثال ۱۳. این عبارت را ساده کنید:

$$(x-y-z)^{۳}+(x+y+z)^{۳}+(z-x-y)^{۳}+(y-x-z)^{۳}$$

حل: x را به عنوان متغیر درنظر می‌گیریم و تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=(x-y-z)^{۳}+(x+y+z)^{۳}+(z-x-y)^{۳}+(y-x-z)^{۳}$$

این تابع به ازای هر x حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x)=۳(x-y-z)^{۲}+۳(x+y+z)^{۲}-۳(z-x-y)^{۲}-۳(y-x-z)^{۲}$$
$$=۳x^{۲}+۳y^{۲}+۳z^{۲}-۶xy-۶xz+۶yz+۳x^{۲}+۳y^{۲}+۳z^{۲}$$
$$+۶xy+۶xz+۶yz-۳z^{۲}-۳x^{۲}-۳y^{۲}+۶xz$$
$$+۶yz-۶xy-۳y^{۲}-۳x^{۲}-۳z^{۲}+۶xy+۶yz-۶xz=۲۴yz$$

فرض کنیم $۲۴yz$ مشتق تابعی مانند $g(x)$ باشد:

$$g'(x)=۲۴yz$$
$$\Rightarrow g(x)=۲۴yzx$$

چون $f(x)$ و $g(x)$ در شرایط نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(x)=q(x)+c \qquad (۱)$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. از تساوی (۱) داریم:

$$(x-y-z)^{۳}+(x+y+z)^{۳}+(z-x-y)^{۳}+(y-x-z)^{۳}$$
$$=۲۴xyz+c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم: $x=۰$. نتیجه می‌شود:

$$c=-(y+z)^{۳}+(y+z)^{۳}-(y-z)^{۳}+(y-z)^{۳}=۰$$
$$\Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$\Rightarrow (x-y-z)^{۳}+(x+y+z)^{۳}+(z-x-y)^{۳}+(y-x-z)^{۳}$$
$$=۲۴xyz$$

استفاده از یکنوا بودن تابع

یکنوا بودن تابع در این موارد کاربرد دارد:

۱. حل نامعادله‌ها
۲. اثبات نامساوی‌های شامل متغیر
۳. اثبات نامساوی‌های عددی
۴. تعیین تعداد ریشه‌های معادله

اگر تابع در فاصله‌ای یکنوا باشد، در آن فاصله صعودی و یا نزولی است و مشتق در آن فاصله علامت ثابتی دارد. (اگر مشتق مثبت باشد، تابع در آن فاصله صعودی و اگر منفی باشد، تابع نزولی است.)

مثال ۱۴. این نامعادله را حل کنید:

$$۲\ln(x+\sqrt{۱+x^{۲}})+e^{x}-e^{-x}<۰$$

حل: تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=۲\ln(x+\sqrt{۱+x^{۲}})+e^{x}-e^{-x}$$

تابع به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی x تعریف شده، پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x)=\frac{۲}{x+\sqrt{۱+x^{۲}}}.(۱+\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^{۲}}})+e^{x}+e^{-x}$$
$$=\frac{۲}{\sqrt{۱+x^{۲}}}+e^{x}+e^{-x}$$

این مشتق به ازای هر x حقیقی مثبت است. بنابراین تابع در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ صعودی است و نمودار آن در بیش از یک نقطه نمی‌تواند محور طول‌ها را قطع کند.

چون $f(۰)=۰$ پس به ازای هر $x<۰$ داریم:

$$f(x)<f(۰)\Rightarrow ۲\ln(x+\sqrt{۱+x^{۲}})+e^{x}-e^{-x}<۰$$

پس ریشه‌های نامعادله عبارت‌اند از همه‌ی اعداد فاصله‌ی $(-\infty,۰)$.

مثال ۱۵. اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$tgx>۳x-۲\sin x$$

اثبات: تابع $f(x)=tgx-۳x+۲\sin x$ را در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ درنظر می‌گیریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{۱}{\cos^{۲}x}-۳+۲\cos x=\frac{۲\cos^{۳}x-۳\cos^{۲}x+۱}{\cos^{۲}x}$$

$$f'(x)=\frac{۲(\cos x-۱)^{۲}(\cos x+\frac{۱}{۲})}{\cos^{۲}x}$$

به ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ مقدار مشتق مثبت است. بنابراین، تابع در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ صعودی است و از آن‌جا داریم:

$$tgx - ۳x + ۲\sin x > ۰$$
$$\Rightarrow tgx > ۳x - ۲\sin x$$

مثال ۱۶. اگر $۰ < x_۱ < x_۲ \le e$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$x_۱^{\frac{۱}{x_۱}} < x_۲^{\frac{۱}{x_۲}} \quad , \quad x_۱^{x_۲} \ge x_۲^{x_۱}$$

و اگر $e \le x_۱ < x_۲$، آن‌گاه: $x_۱^{x_۲} \ge x_۲^{x_۱}$

اثبات: تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ درنظر می‌گیریم که در آن پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = \frac{۱ - \ln x}{x^۲}$$

چون مشتق به ازای $x = e$ صفر می‌شود و به ازای $۰ < x < e$، $f'(x) > ۰$ و به ازای $x > e$، داریم: $f'(x) < ۰$، پس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $[۰,e]$ صعودی و در بازه‌ی $[e,+\infty)$ نزولی است. بنابراین، به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ دلخواه که در آن $۰ < x_۱ < x_۲ \le e$ نامساوی $f(x_۱) < f(x_۲)$ برقرار است، یعنی:

$$\frac{\ln x_۱}{x_۱} < \frac{\ln x_۲}{x_۲} \Rightarrow \frac{۱}{x_۱}\ln x_۱ < \frac{۱}{x_۲}\ln x_۲$$

$$\Rightarrow \ln x_۱^{\frac{۱}{x_۱}} < \ln x_x^{\frac{۱}{x_۲}}$$

چون $\ln t$ تابع صعودی است، پس:

$$x_۱^{\frac{۱}{x_۱}} < x_۲^{\frac{۱}{x_۲}}$$

اگر دو طرف نامساوی $\frac{\ln x_۱}{x_۱} < \frac{\ln x_۲}{x_۲}$ را در $x_۱x_۲ > ۰$ ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$x_۲ \ln x_۱ < x_۱ \ln x_۲ \Rightarrow \ln x_۱^{x_۲} < \ln x_۲^{x_۱}$$
$$\Rightarrow x_۱^{x_۲} < x_۲^{x_۱}$$

هم‌چنین، اگر $e \le x_۱ < x_۲$، آن‌گاه:

$$f(x_۱) > f(x_۲) \Rightarrow \frac{\ln x_۱}{x_۱} > \frac{\ln x_۲}{x_۲}$$

$$\Rightarrow x_۱^{\frac{۱}{x_۱}} > x_۲^{\frac{۱}{x_۲}} \quad \text{و} \quad x_۱^{x_۲} < x_۲^{x_۱}$$

مثال ۱۷. $(tg۴۸^\circ)^{\cot g۴۸^\circ}$ و $(tg۵۰^\circ)^{\cot g۵۰^\circ}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: دیده می‌شود:

$$tg۴۸^\circ = tg\frac{۴\pi}{۱۵} \quad \text{و} \quad \cot g۴۸^\circ = \frac{۱}{tg\frac{۴\pi}{۱۵}}$$

$$tg۵۰^\circ = tg\frac{۵\pi}{۱۸} \quad \text{و} \quad \cot g۵۰^\circ = \frac{۱}{tg\frac{۵\pi}{۱۸}}$$

$$۰ < tg\frac{۴\pi}{۱۵} < tg\frac{۵\pi}{۱۸} < e$$

اگر قرار دهیم $x_۱ = tg\frac{۴\pi}{۱۵}$ و $x_۲ = tg\frac{۵\pi}{۱۸}$، آن‌گاه بنابر مثال قبلی، چون $۰ < x_۱ < x_۲ < e$، پس:

$$x_۱^{\frac{۱}{x_۱}} < x_۲^{\frac{۱}{x_۲}}$$

و از آن‌جا داریم:

$$(tg\frac{۴\pi}{۱۵})^{\frac{۱}{tg\frac{۴\pi}{۱۵}}} < (tg\frac{۵\pi}{۱۸})^{\frac{۱}{tg\frac{۵\pi}{۱۸}}}$$

$$\Rightarrow (tg۴۸^\circ)^{\cot g۴۸^\circ} < (tg۵۰^\circ)^{\cot g۵۰^\circ}$$

مثال ۱۸. ثابت کنید:

$$(۱۹۹۹)^{۲۰۰۰} > (۲۰۰۰)^{۱۹۹۹}$$

اثبات: به ازای $e \le x_۱ < x_۲$ از نامساوی $x_۱^{x_۲} < x_۲^{x_۱}$ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$x_۱ = ۱۹۹۹ \quad , \quad x_۲ = ۲۰۰۰$$

داریم:

$$e < ۱۹۹۹ < ۲۰۰۰ \Rightarrow (۱۹۹۹)^{۲۰۰۰} > (۲۰۰۰)^{۱۹۹۹}$$

منبع:
مجله‌ی «ریاضیات در مدرسه» شماره‌ی ۹، سال ۲۰۰۱، چاپ مسکو.