هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۲

• سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi – moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت اول، با هم‌نهشتی و تعریف‌ها، روابط و تعدادی از قوانین و مسأله‌های مربوط به آن آشنا شدیم. در این قسمت می‌کوشیم، ابتدا به برخی دیگر از مسأله‌های طرح شده در رابطه با موضوع پاسخ دهیم. سپس به ارایه‌ی کاربردهای هم‌نهشتی در سطوح گوناگون می‌پردازیم.

۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را با فرض $n \geq ۵$ بر ۴۸ را بیابید.

$$N = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + n!$$

حل: می‌دانیم $n! = n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times ۱$، پس:

$$۱! \overset{۴۸}{\equiv} ۱ \ ,\ ۲! \overset{۴۸}{\equiv} ۲ \ ,\ ۳! \overset{۴۸}{\equiv} ۶ \ ,\ ۴! \overset{۴۸}{\equiv} ۲۴ \ ,\ ۵! \overset{۴۸}{\equiv} ۲۴ \ ,\ ۶! \overset{۴۸}{\equiv} ۰$$

با فرض $n > ۵$، خواهیم داشت:

$$n > ۵ : n! \overset{۴۸}{\equiv} ۰$$

بنابراین، با فرض $n \geq ۵$، می‌توان نوشت:

$$N = ۱! + ۲! + ۳! + \cdots + n! \overset{۴۸}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۲۴ + ۰ + \cdots + ۰ = ۵۷$$

$N \overset{۴۸}{\equiv} ۵۷ \overset{۴۸}{\equiv} ۹ \Rightarrow N \overset{۴۸}{\equiv} ۹ \ ;\ r = ۹$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم N بر ۴۸)

۱۰. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $M = 5^{2n}\times 9^{n+1} + 2^{10n+3}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل:

$$2^5 \overset{17}{\equiv} -2 \;;\; \left(2^5\right)^{2n} \overset{17}{\equiv} (-2)^{2n} \;;$$

$$2^{10n}\times 2^3 \overset{17}{\equiv} (-2)^{2n}\times 2^3 = 2^{2n}\times 8$$

$$2^{10n+3} \overset{17}{\equiv} 8\times 2^{2n} \;,\; 5^{2n}\times 9^{n+1} \overset{17}{\equiv} 15^{2n}\times 9$$

$$\overset{17}{\equiv} (-2)^{2n}\times 9 = 2^{2n}\times 9$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$2^{10n+3} + 5^{2n}\times 9^{n+1} \overset{17}{\equiv} 8\times 2^{2n} + 9\times 2^{2n} = 17\times 2^{2n} \overset{17}{\equiv} 0 \;;$$

$$M = 5^{2n}\times 9^{n+1} + 2^{10n+3} \overset{17}{\equiv} 0$$

۱۱. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $N = 4^{3n} + 18n - 1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

حل:

$$4^{3n} = (4^3)^n = (64)^n \overset{9}{\equiv} (1)^n = 1 \;;\; 4^{3n} \overset{9}{\equiv} 1 \;,\; 18n \overset{9}{\equiv} 0$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$4^{3n} + 18n \overset{9}{\equiv} 1 + 0 \;;\; 4^{3n} + 18n \overset{9}{\equiv} 1 \;;\; N = 4^{3n} + 18n - 1 \overset{9}{\equiv} 0$$

۱۲. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $S = 7^{6n+3} + 7^{3n+2} - 12$ بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

حل:

$$7^3 = 343 \overset{19}{\equiv} 1 \;;\; (7^3)^{2n}\times 7^3 \overset{19}{\equiv} 1 \;;\; 7^{6n+3} \overset{19}{\equiv} 1 \;,$$

$$7^{3n+2} \overset{19}{\equiv} 7^2 \overset{19}{\equiv} 11 \;;\; 7^{3n+2} \overset{19}{\equiv} 11$$

از جمع دو رابطه‌ی اخیر:

$$7^{6n+3} + 7^{3n+2} \overset{19}{\equiv} 12 \;;\; S = 7^{6n+3} + 7^{3n+2} - 12 \overset{19}{\equiv} 0$$

۱۳. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی، عبارت $6^{3n-1} + 7$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است.

حل:

$$6^3 = 216 \overset{43}{\equiv} 1 \;;\; 6^{3n} \overset{43}{\equiv} 1 \;,\; 6^{3n-1} + 7 = 6^{3n-3}\times 6^2 + 7,$$

$$(6^3)^{n-1} \overset{43}{\equiv} 1 \;;\; 6^{3n-3} \overset{43}{\equiv} 1 \;,\; 6^{3n-1} + 7 \overset{43}{\equiv} (1)6^2 + 7 = 43;$$

$$6^{3n-1} + 7 \overset{43}{\equiv} 0$$

۱۴. ثابت کنید به ازای هر مقدار طبیعی n و اعداد صحیح a و b داریم:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

حل: با توجه به بسط دو جمله‌ای:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n \quad (1)$$

از برابری ۱ نتیجه می‌شود:

$$(a+b)^n - a^n - b^n = kab \quad (2)$$

برابری ۲ را می‌توان به‌صورت هم‌نهشتی نشان داد:

$$(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

۱۵. اگر $a \overset{n}{\equiv} b$ و $m|n$، آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

حل: با توجه به فرض مسأله، یعنی $a \overset{n}{\equiv} b$، می‌توان نوشت:

$n|(a-b)$

از طرفی چون $m|n$، پس با توجه به خاصیت تعدی می‌توان نوشت:

$$m|(a-b) \;;\; a \overset{m}{\equiv} b$$

۱۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر بر ۷ را بیابید.

$$N = 3^{557} + 4^{557} + 7^{557} + 77^{557} + 777^{557}$$

حل: هم‌نهشتی‌های زیر واضح‌اند:

$$7^{557} \overset{7}{\equiv} 0 \;,\; 77^{557} \overset{7}{\equiv} 0 \;,\; 777^{557} \overset{7}{\equiv} 0$$

$$3^{557} + 4^{557} = (3+4)(3^{556} - 3^{555}\times 4 + \cdots + 4^{556}) = 7k \;;$$

$$3^{557} + 4^{557} \overset{7}{\equiv} 0$$

از جمع هم‌نهشتی‌های اخیر خواهیم داشت:

$$N = 3^{557} + 4^{557} + 7^{557} + 77^{557} + 777^{557} \overset{7}{\equiv} 0$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر است.)

۱۷. نشان دهید $k = 5^n - 3^n - 2^n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به رابطه‌ی $(a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ و فرض $a = 3$ و $b = 2$، خواهیم داشت:

$$(3+2)^n \overset{6}{\equiv} 3^n + 2^n \;;\; 5^n \overset{6}{\equiv} 3^n + 2^n$$

پس:

$$k = 5^n - 3^n - 2^n \overset{6}{\equiv} 0$$

۱۸. ثابت کنید $N = m^n - m^{n-1} - m + 1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی m و n بر $(m-1)^2$ بخش‌پذیر است.

حل:

$$N = m^n - m^{n-1} - m + 1 = m^{n-1}(m-1) - (m-1)$$

$$= (m-1)(m^{n-1} - 1)$$

از طرف دیگر:

$$m \overset{m-1}{\equiv} 1 \ ;\ m^{n-1} \overset{m-1}{\equiv} 1 \ ;\ m^{n-1}-1=k(m-1)$$

پس:

$$N=m^n-m^{n-1}-m+1=k(m-1)^2$$

۱۹. ثابت کنید عدد فرمای $F_n=2^{2^n}+1$ به‌ازای $n=5$ مرکب و بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

حل: کافی است ثابت کنیم عدد F_5 دارای عامل ۶۴۱ است:

$$2^{32}+1\overset{641}{\equiv}0$$

با توجه به برابری عددی $640=5\times2^7$، می‌توان نوشت:

$$5\times2^7\overset{641}{\equiv}-1$$

دو طرف این رابطه را به توان ۴ می‌رسانیم:

$$5^4\times2^{28}\overset{641}{\equiv}1$$

از برابری $641-16=625=5^4$، داریم $5^4\overset{641}{\equiv}-2^4$.

پس:

$$-2^4\times2^{28}\overset{641}{\equiv}1 \ ;\ 2^{32}\overset{641}{\equiv}-1$$

بنابراین:

$$F_5=2^{32}+1\overset{641}{\equiv}0$$

۲۰. ثابت کنید $2^{37n}-1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $33+223=256=2^8$، می‌توان نوشت:

$$2^8\overset{223}{\equiv}33 \ ;\ (2^8)^2\overset{223}{\equiv}(33)^2$$

از طرف دیگر:

$$33^2\overset{223}{\equiv}1089=5(223)-26\overset{223}{\equiv}-26$$

پس:

$$2^{16}\overset{223}{\equiv}-26 \ ;\ (2^{16})^2\overset{223}{\equiv}(-26)^2$$

با توجه به برابری $676=26^2$ و تقسیم ۶۷۶ بر ۲۲۳، خواهیم داشت:

$$2^{32}\overset{223}{\equiv}26^2=676=3(223)+7\overset{223}{\equiv}7$$

بنابراین:

$$2^5\times2^{32}\overset{223}{\equiv}32\times7=224=223+1$$

پس:

$$2^{37}\overset{223}{\equiv}1 \ ;\ 2^{37n}\overset{223}{\equiv}1$$

۲۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $4^{143n}-7^n$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۹ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $64=4^3$، می‌توان نوشت:

$$4^3=64=63+1=7(9)+1\overset{9}{\equiv}1$$

پس:

$$(4^3)^{47}\times4^2=4^{143}\overset{9}{\equiv}16=9+7\overset{9}{\equiv}7$$

بنابراین:

$$4^{143n}\overset{9}{\equiv}7^n \ ;\ 4^{143n}-7^n\overset{9}{\equiv}0$$

درنتیجه، باقی‌مانده‌ی تقسیم $4^{143n}-7^n$، به‌ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۹، برابر صفر است.

۲۲. ثابت کنید عدد $2^{76}+17\times2^{39}-5$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $2^6=64=63+1$، خواهیم داشت:

$$2^6=3(21)+1\overset{21}{\equiv}1 \ ;\ 2^{36}\overset{21}{\equiv}1 \ ;\ 2^{38}\overset{21}{\equiv}4\overset{21}{\equiv}-17$$

پس:

$$(2^{38})^2\overset{21}{\equiv}(-17)^2=289=13(21)+16\overset{21}{\equiv}16$$

بنابراین:

$$2^{76}+17\times2^{39}-5\overset{21}{\equiv}16+17\times2^3-5$$
$$=16+136-5=147=7(21)\overset{21}{\equiv}0$$

۲۳. ثابت کنید عدد $5^{201}+2^{104}+2^{101}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $5^{201}=5\times5^{200}=5\times25^{100}$ و هم‌نهشتی $25\overset{23}{\equiv}2$، می‌توان نوشت:

$$5^{201}\overset{23}{\equiv}5\times2^{100}$$

از طرف دیگر:

$$2^{104}+2^{101}=2^{100}\times2^4+2^{100}\times2=18\times2^{100}$$

پس:

$$5^{201}+2^{104}+2^{101}\overset{23}{\equiv}5\times2^{100}+18\times2^{100}\overset{23}{\equiv}23\times2^{100}\overset{23}{\equiv}0$$

۲۴. ثابت کنید عدد $9^{21}+8^{12}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری $9^2=81=73+8$ و هم‌نهشتی $9^2\overset{73}{\equiv}8$، می‌توان نوشت:

$$9^{20}\overset{73}{\equiv}8^{10} \ ;\ 9^{21}\overset{73}{\equiv}9\times8^{10}$$

پس:

$$9^{21}+8^{12}\overset{73}{\equiv}9\times8^{10}+64\times8^{10}\overset{73}{\equiv}73\times8^{10}\overset{73}{\equiv}0$$

۲۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $3^{300}-2^{300}$ بر ۳۵ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $3^3=27=35-8$ و هم‌نهشتی $3^3\overset{35}{\equiv}-8$، می‌توان نوشت:

$$3^{300}\overset{35}{\equiv}8^{100} \ ;\ 3^{300}\overset{35}{\equiv}2^{300}$$

پس:

$$3^{300}-2^{300}\overset{35}{\equiv}0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $3^{300}-2^{300}$ بر ۳۵ برابر صفر است.

۲۶. ثابت کنید عدد $3^{27}+7^{10}\times2^{29}$، بر ۲۹ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری‌های $3^{27}=(3^3)^9=27^9$ و $7^{10}\times2^{29}=28\times7^9\times8^9=28\times56^9$ و هم‌نهشتی‌های $27\overset{29}{\equiv}-2$، $28\overset{29}{\equiv}-1$ و $56\overset{29}{\equiv}-2$، خواهیم داشت:

$$3^{27}+7^{10}\times2^{29}\overset{29}{\equiv}(-2)^9+(-1)(-2)^9\overset{29}{\equiv}-2^9+2^9\overset{29}{\equiv}0$$

تمرین: ثابت کنید عدد $3+3^{302}\times2^{42}\times20^{40}$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: ابتدا برابری زیر را نتیجه بگیرید و سپس $27\overset{13}{\equiv}1$، $64\overset{13}{\equiv}-1$ و $25\overset{13}{\equiv}-1$ را به‌کار ببرید.

$$3^{302}\times2^{42}\times20^{40}=36\times(27)^{100}(64)^{20}(25)^{20}$$

۲۷. نشان دهید برای هر عدد طبیعی n و برای هر عدد صحیح فرد مثل a داریم:

$$a^{2^{n-1}}\overset{2^n}{\equiv}1$$

حل: این مسأله را با روش استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$1)\ n=1:\ a^{2^0}\overset{2}{\equiv}1$$

واضح است که برای هر عدد صحیح فرد مثل a داریم:

$$a\overset{2}{\equiv}1$$

پس، حکم به ازای $n=1$ درست است.

$$2)\ n=k:\ a^{2^{k-1}}\overset{2^k}{\equiv}1 \quad \text{(فرض استقرا)}$$

$$3)\ n=k+1:\ a^{2^k}\overset{2^{k+1}}{\equiv}1 \quad \text{(حکم استقرا)}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج:

$$a^{2^k}-1=(a^{2^{k-1}}-1)(a^{2^{k-1}}+1)$$

بنابر فرض استقرا داریم: $a^{2^{k-1}}-1=2^kS$. هم‌چنین با توجه به فرد بودن a می‌توان نوشت:

$$a^{2^{k-1}}+1=2t:\ a^{2^k}-1=(2^ks)(2t)=2^{k+1}st$$

پس:

$$a^{2^k}-1\overset{2^{k+1}}{\equiv}0:\ a^{2^k}\overset{2^{k+1}}{\equiv}1$$

۲۸. ثابت کنید عدد $2^{53}+5^{10}\times3^{12}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

حل: با توجه به برابری‌های:

$$2^{53}+5^{10}\times3^{12}=2^3\times2^{50}+5^{10}\times3^2\times3^{10}$$

$$=8\times32^{10}+15^{10}\times9$$

و با توجه به $32\overset{17}{\equiv}15$، می‌توان نوشت:

$$2^{53}+5^{10}\times3^{12}\overset{17}{\equiv}8\times15^{10}+15^{10}\times9\overset{17}{\equiv}17\times15^{10}\overset{17}{\equiv}0$$

۲۹. نشان دهید برای هر n طبیعی داریم:

$$3^{4n}\overset{17}{\equiv}4^{3n}$$

حل: با توجه به برابری‌های $3^4=81=4(17)+13$ و $4^3=64=3(17)+13$ خواهیم داشت:

$$3^{4n}=(3^4)^n\overset{17}{\equiv}(13)^n\ ,\ 4^{3n}=(4^3)^n\overset{17}{\equiv}(13)^n$$

پس:

$$3^{4n}\overset{17}{\equiv}4^{3n}\overset{17}{\equiv}13^n$$

۳۰. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$4^n+6n\overset{9}{\equiv}1$$

حل: با توجه به صورت مسأله، به‌ترتیب:

$$1)\ n=1:\ 4^1+6(1)\overset{9}{\equiv}1\ ;\ 10\overset{9}{\equiv}1$$

$$2)\ n=k:\ 4^k+6k\overset{9}{\equiv}1 \quad \text{(فرض استقرا)}$$

$$3)\ n=k+1:\ 4^{k+1}+6(k+1)\overset{9}{\equiv}1 \quad \text{(حکم استقرا)}$$

دو طرف فرض استقرا را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$4^{k+1}+24k\overset{9}{\equiv}4\ ;\ 4^{k+1}+6k+18k+6\overset{9}{\equiv}10\ ;$$

$$4^{k+1}+6(k+1)+18k-9\overset{9}{\equiv}1$$

با توجه به $18k-9\overset{9}{\equiv}0$، می‌توان نوشت:

$$4^{k+1}+6(k+1)\overset{9}{\equiv}1$$

پس، حکم برقرار است.

۳۱. ثابت کنید برای هر n طبیعی داریم:

$$160^n+96^n\overset{62}{\equiv}3^n+5^n$$

حل: برابری $62=2\times31$ بدیهی است. بنابراین کافی است نشان دهیم که طرف‌های اول و دوم هریک زوج و بر ۳۱ بخش‌پذیر است. طرف اول زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد زوج است. طرف دوم نیز زوج است؛ زیرا مجموع دو عدد فرد است. در این‌جا کافی است هم‌نهشتی زیر را ثابت کنیم:

$$160^n+96^n\overset{31}{\equiv}3^n+5^n$$

با توجه به هم‌نهشتی‌های $160\overset{31}{\equiv}5$ یا $160^n\overset{31}{\equiv}5^n$ و $96\overset{31}{\equiv}3$ یا $96^n\overset{31}{\equiv}3^n$، درستی هم‌نهشتی اخیر واضح است.

۳۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $k=(6^{44}+7)(6^{29}+7)$ بر ۴۳ را بیابید.

حل: با توجه به هم‌نهشتی $6^3 \overset{43}{\equiv} 1$، می‌توان نوشت:

$$6^{29}=6^{27}\times 6^2=(6^3)^9\times 36 \overset{43}{\equiv} -7 \ ; \ 6^{29}+7\overset{43}{\equiv}0$$

هم‌چنین:

$$6^{44}=6^{42}\times 6^2=(6^3)^{14}\times 36 \overset{43}{\equiv} -7 \ ; \ 6^{44}+7\overset{43}{\equiv}0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k بر ۴۳ برابر صفر است.

۳۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر را بر ۹ بیابید.

$$N=(4^{181}+10^{11}+5)(4^{91}+10^{6}+4)$$

حل: با توجه به هم‌نهشتی‌های $8\overset{9}{\equiv}-1$ و $10\overset{9}{\equiv}1$، می‌توان نوشت:

$$4^{181}=2^{362}=(2^3)^{120}\times 4=8^{120}\times 4\overset{9}{\equiv}(-1)^{120}\times 4=4 \ ;$$

$$10^{11}\overset{9}{\equiv}1 \ ; \ 10^{6}\overset{9}{\equiv}1 \ ; \ 4^{91}=4\times(2^3)^{60}=4\times 8^{60}\overset{9}{\equiv} 4\times(-1)^{60}=4$$

پس:

$$4^{181}+10^{11}+5\overset{9}{\equiv}4+1+5\overset{9}{\equiv}1 \ ; \ 4^{91}+10^{6}+4\overset{9}{\equiv}4+1+4\overset{9}{\equiv}0$$

بنابراین، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N بر ۹ برابر ۱ است.

۳۴. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$9|M=2\times 16^n-4^n-1$$

حل: باید نشان دهیم:

$$M=2\times 16^n-4^n-1\overset{9}{\equiv}0$$

به‌ترتیب:

$$1)\ n=1:\ 2\times 16^1-4^1-1=27\overset{9}{\equiv}0$$

$$2)\ n=k:\ 2\times 16^k-4^k-1\overset{9}{\equiv}0$$ (فرض استقرا)

$$3)\ n=k+1:\ 2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1\overset{9}{\equiv}0$$ (حکم استقرا)

دو طرف فرض استقرا را در ۱۶ ضرب می‌کنیم:

$$2\times 16^{k+1}-16\times 4^k-16\overset{9}{\equiv}0\ ;$$

$$2\times 16^{k+1}-4\times 4^{k+1}-16\overset{9}{\equiv}0\ ;$$

$$2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1-(12\times 4^k+15)\overset{9}{\equiv}0$$

در این جا، برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم:

$$12\times 4^k+15\overset{9}{\equiv}0\ ;\ 3(4^{k+1}+5)\overset{9}{\equiv}0$$

پس کافی است ثابت کنیم:

$$4^{k+1}+5\overset{3}{\equiv}0$$

با توجه به هم‌نهشتی $4\overset{3}{\equiv}1$، می‌توان نوشت:

$$4^{k+1}+5\overset{3}{\equiv}1+5=6\overset{3}{\equiv}0$$

بنابراین حکم برقرار است:

$$2\times 16^{k+1}-4^{k+1}-1\overset{9}{\equiv}0$$

تمرین

۱. باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=1!+2!+3!+\cdots+(1387)!$ بر ۴۲ را بیابید.

۲. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $M=5^{4n}\times 9^{2n+1}+2^{20n+3}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۳. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $N=4^{6n}+36n$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۴. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $S=7^{12n+3}+7^{6n+2}-12$ بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

۵. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، عبارت $k=6^{12n-1}+7$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است.

۶. ثابت کنید به‌ازای هر n طبیعی، باقی‌مانده‌ی تقسیم $N=13^n-7^n-6^n+41$ بر ۴۲ برابر ۴۱ است.

۷. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد زیر بر ۱۲ را تعیین کنید.

$$N=3^{1383}+4^{1383}+13^{1383}+11^{1384}$$

۸. نشان دهید عدد $k=25^n-9^n-4^n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۹. ثابت کنید عبارت $N=2^{3n}-2^{3n-3}-7$ به‌ازای هر n طبیعی بر ۴۹ بخش‌پذیر است.

۱۰. ثابت کنید عدد فرمای $F_5=2^{32}+1$ مرکب است.

۱۱. ثابت کنید عدد $N=2^{74n}-1$ به ازای جمیع مقادیر طبیعی n بر ۲۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۲. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{572n}-49^n$ را به ازای هر عدد طبیعی n بر ۹ به‌دست آورید.

۱۳. ثابت کنید عدد $k=2^{76}-2^{41}+16$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است.

۱۴. ثابت کنید عدد $N=125^{67}+4^{52}+2^{101}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

۱۵. ثابت کنید عدد $k=3^{22}+2^{36}$ بر ۷۳ بخش‌پذیر است.

۱۶. ثابت کنید عدد $N=2^{53}+25^{5}\times 9^{6}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۷. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی عبارت $N=3^{4n}-4^{3n}$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۸. با استفاده از روش استقرای ریاضی ثابت کنید، باقی‌مانده‌ی $N=2^{2n}+6n$ بر ۹ برابر ۱ است.

۱۹. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N=2^{362}+10^{11}+5$ بر ۹ را تعیین کنید.