جانشینی‌های مثلثاتی

به علت فراوانی تعداد اتحادهای مثلثاتی، انتخاب جانشینی مثلثاتی هوشمندانه، غالباً به راه‌حلی بسیار ساده می‌انجامد. این روش در تمام مسائلی که در ادامه ارائه کرده‌ایم، به‌کار رفته است. جانشینی مورد بحث، معمولاً هم‌چون مسئله‌ی زیر، توسط صورت و فرم عبارت جبری مربوطه پیشنهاد می‌شود.

مسئله: تمام جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید.

$x^3 - 3x = y$

$y^3 - 3y = z$

$z^3 - 3z = x$

در این‌جا حضور $x^3 - 3x$، فرمول سه‌برابر زاویه‌ی مربوط به کسینوس‌ها را به‌خاطر می‌آورد. البته در این مورد ضریب جلوی x^3 مفقود است، ولی ما با استفاده از روش دوبرابر کسینوس به‌جای کسینوس، مواظب آن خواهیم بود، و کار را با یافتن جواب‌های بین ۲- و ۲ آغاز می‌کنیم.

با نوشتن $x = 2\cos u$، $y = 2\cos v$، $z = 2\cos w$، با $u, v, w \in [0, \pi]$، دستگاه به صورت زیر درمی‌آید:

$2\cos 3u = 2\cos v$

$2\cos 3v = 2\cos w$

$2\cos 3w = 2\cos u$

با استفاده از فرمول سه‌برابر زاویه برای $\cos 3u$ و $\cos v$، معادله‌ی اول چنین می‌شود:

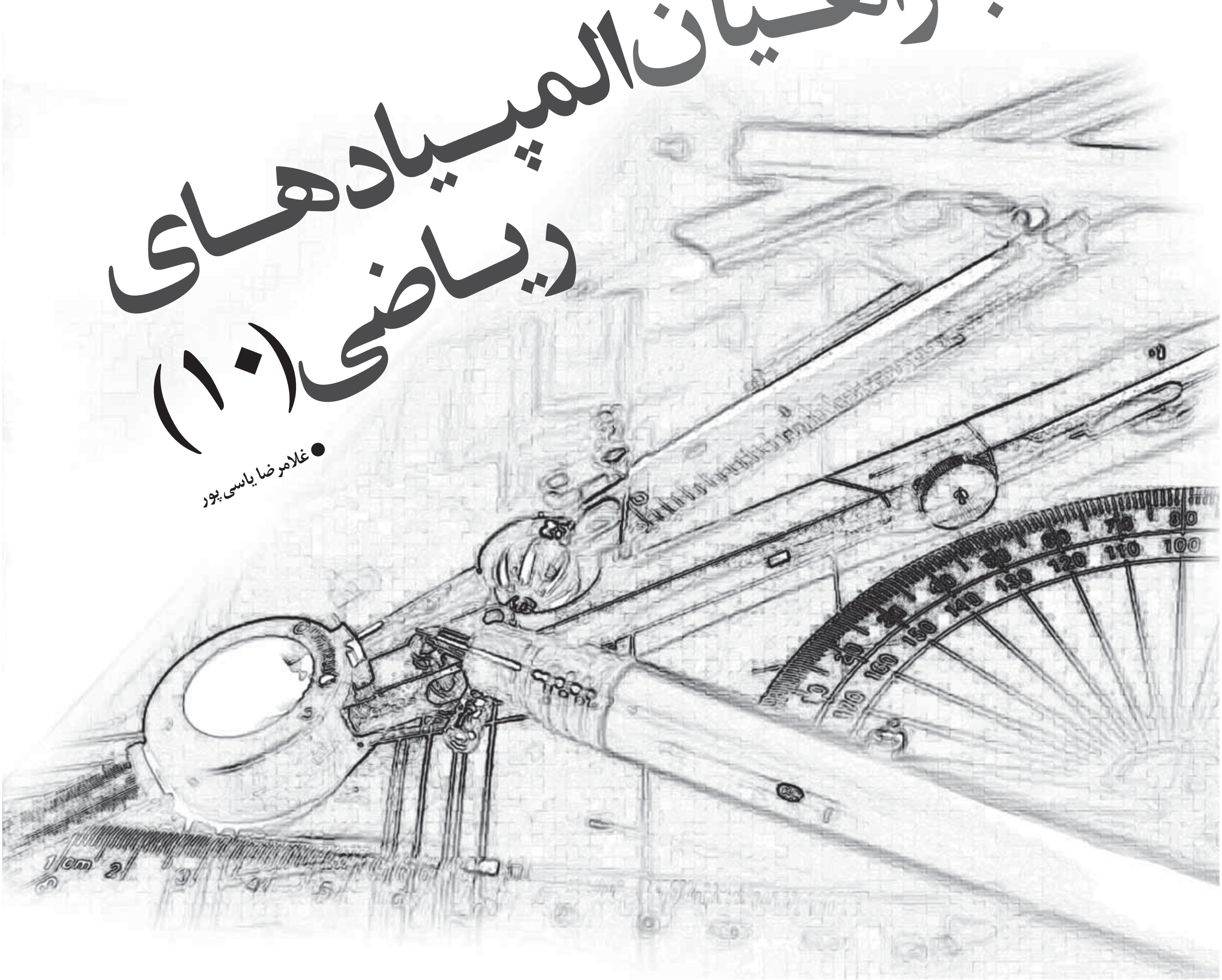
$\cos 9u = \cos 3v$

با ترکیب این معادله با معادله‌ی دوم، به‌دست می‌آوریم:

$\cos 9u = \cos w$

باراهیان المپیادهای ریاضی (۱۰)

● غلامرضا یاسی‌پور



مانند قبل:

$\cos 27u = \cos 3w$

و معادله‌ی سوم، معادله‌ی زیر را به‌دست می‌دهد:

$\cos 27u = \cos u$

این برابری برقرار است اگر و تنها اگر، به‌ازای عدد صحیح k، داشته باشیم:

$27u = 2k\pi \pm u$

جواب‌های واقع در بازه‌ی $[0,\pi]$ عبارت‌اند از:

$u = k\pi / 14 \ , \ k = 0,1,\dots,14$

و:

$u = k\pi / 13 \ , \ k = 0,1,2,\dots,12$

در نتیجه:

$x = 2\cos k\pi / 14 \ , \ y = 2\cos 3k\pi / 14 \ , \ z = 2\cos 9k\pi / 14$

$k = 0,1,\dots,14$

و $x = 2\cos k\pi / 13$ ، $y = 2\cos 3k\pi / 13$ و $z = 2\cos 9k\pi / 13$ ، با درنظر گرفتن $k = 0,1,2,\dots,12$ ، جواب‌های دستگاه معادلات داده شده‌اند.

از آن‌جا که حداکثر $27 = 3 \times 3 \times 3$ جواب وجود دارد (به درجه‌ی دستگاه توجه کنید) و هم‌اکنون ۲۷ جواب متمایز به‌دست آورده‌ایم، این جواب‌ها تمام جواب‌های مطلوب هستند. اکنون به مثالی می‌پردازیم که در آن تابع تانژانت به‌کار رفته است.

مسئله: فرض می‌کنیم $\{x_n\}_n$ دنباله‌ای باشد که در برگشتی

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}} \ , \ n \geq 1$$

صدق می‌کند. ثابت کنید که این دنباله، متناوب یا دوری است.

فرمول تانژانت تفاضل را به‌خاطر می‌آوریم:

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \times tgb}$$

نیز توجه داشته باشید که: $tg\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. اگر رابطه‌ی برگشتی مفروض را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x_{n+1} = \frac{x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + x_n \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

طبیعی است که جانشینی $x_1 = tgt$ را، به‌ازای عدد حقیقی t، انجام دهیم. در این صورت: $x_2 = tg(t - \pi / 6)$

و به‌طور استقرایی:

$x_n = tg(t - (n-1)\pi / 6) \ , \ n \geq 1$

از آن‌جا که تانژانت، دوری با دوره‌ی π است، به‌دست می‌آوریم: $x_n = x_{n+6}$ که نشان می‌دهد، دنباله‌ی مورد نظر دارای دوره‌ی ۶ است.

چند مسئله برای تمرین بیشتر

۱. به‌ازای چه مقادیر پارامتر حقیقی a، عدد حقیقی x صادق در $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$ موجود است؟

۲. با مفروض بودن چهار عدد متمایز در بازه‌ی $(0,1)$، نشان دهید دو عدد از آن‌ها، x و y، چنان موجودند که:

$$0 < x < \sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}$$

۳. دنباله‌ی $\{x_n\}_n$ ، به‌ازای هر $n \geq 1$ ، در $2 \leq x_n \leq \sqrt{x_{n+2} + 2}$ صادق است. جمع مقادیر ممکن x_{1986} را بیابید.

۴. جمع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$2x + x^2y = y$$
$$2y + y^2z = z$$
$$2z + z^2x = x$$

۵. جمع جواب‌های حقیقی دستگاه معادلات زیر را بیابید:

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = 2x_2$$

$$x_2 - \frac{1}{x_2} = 2x_3$$

$$x_3 - \frac{1}{x_3} = 2x_4$$

$$x_4 - \frac{1}{x_4} = 2x_1$$

۶. ثابت کنید، به‌ازای هر $x, y \in R$ ، نابرابری‌های زیر برقرارند:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$$

۷. به‌ازای هر عدد حقیقی x، دنباله‌ی $\{x_n\}_n$ را به‌طور برگشتی، با استفاده از $x_1 = x$ ، و:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n}$$

به‌ازای هر n، تعریف کنید.

اگر $x_n = \pm 1$ ، آن‌گاه دنباله مختوم می‌شود (به‌ازای x_{n+1} تعریف ناشده خواهد بود). چند مورد از چنین دنباله‌هایی پس از هشت جمله مختوم می‌شوند؟

۸. دنباله‌ی اعداد حقیقی

$a_1, a_2, a_3, \dots$

دارای این ویژگی است که به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت k، داریم:

$a_{k+1} = (ka_k + 1) / (k - a_k)$

ثابت کنید این دنباله شامل بی‌نهایت جمله‌ی مثبت و بی‌نهایت جمله‌ی منفی است.

۹. با مفروض بودن:

$$-1\le a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le 1$$

ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-a_ia_{i+1}-\sqrt{(1-a_i^2)(1-a_{i+1}^2)}}<\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

۱۰. فرض می‌کنیم $x_0=0$، و:

$$x_1,x_2,\ldots,x_n>0$$

با توجه به این که داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}x_k=1$$

ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{1+x_0+\ldots+x_{k-1}}\sqrt{x_k+\ldots+x_n}}<\frac{\pi}{2}$$

حل مسئله‌ها

۱. $t\in[0,\pi]$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\cos t=x$، این کار امکان‌پذیر است، زیرا مقدار $|x|$ نمی‌تواند از ۱ تجاوز کند. داریم:

$$\sqrt{1-x^2}=\sin t$$

زیرا $\sin t$، به‌ازای $t\in[0,\pi]$، مثبت است. در این صورت، نابرابری مورد بحث به $\sin t+\cos t\ge a$ تبدیل می‌شود. ماکزی‌مم تابع

$$f(t)=\sin t+\cos t=2\sin\frac{\pi}{4}\cos(t-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})$$

در بازه‌ی $[0,\pi]$، برابر $\sqrt{2}$ است. در نتیجه، برد a مجموعه‌ی جمیع اعداد حقیقی نامتجاوز از $\sqrt{2}$ است.

۲. فرض می‌کنیم که اعداد مورد نظر a_1، a_2، a_3 و a_4 باشند. جانشینی $a_k=\sin t_k$، $t_k\in(0,\pi/2)$ را درنظر می‌گیریم. مسئله می‌خواهد این را نشان دهیم که دو اندیس i و j با این شرط:

$$0<\sin t_i\cos t_j-\sin t_j\cos t_i<\frac{1}{2}$$

موجودند. اما:

$$\sin t_i\cos t_j-\sin t_j\cos t_i=\sin(t_i-t_j)$$

در نتیجه باید ثابت کنیم که i و jای با $t_i>t_j$ و $t_i-t_j<\frac{\pi}{6}$ وجود دارند. این مطلب از اصل لانه‌ی کبوتر یا دیریکله حاصل می‌شود. زیرا دو مورد از چهار عدد مزبور باید در یکی از بازه‌های بالا قرار گیرند:

$$(0,\pi/6]\ ,\ (\pi/6,\pi/3]\ ,\ (\pi/3\ ,\ \pi/2)$$

۳. از آن‌جا که به‌ازای هر n، $0\le x_n\le 2$، می‌توانیم جانشینی مثلثاتی $x_n=2\cos y_n$ را انجام دهیم که در آن: $0\le y_n\le\pi/2$.

از نابرابری $x_n\le\sqrt{x_{n+2}+2}$ و فرمول دوبرابر زاویه‌ی $\cos2\alpha+1=2\cos^2\alpha$، نابرابری زیر را حاصل می‌کنیم:

$$\cos y_{n+2}/2\le\cos y_n$$

از آن‌جا که کسینوس، در $[0,\pi/2]$، تابعی نزولی است، این موضوع مستلزم $y_{n+2}/2\ge y_n$ به‌ازای جمیع مقادیر n است.

با استفاده از استقرا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر n و k داریم:

$$y_n\le y_{n+2k}/2^k$$

و با رفتن k به بی‌نهایت، $y_n=0$ را به‌ازای هر n به‌دست می‌آوریم.

(آزمون انتخابی IMO رومانی، ۱۹۸۶، طرح از T.Andreescu)

۴. اگر یکی از مجهول‌ها، مثلاً x، برابر ±1 باشد، آن‌گاه $2x+x^2y=y$ به $\pm2=0$ منجر می‌شود که غیرممکن است. در نتیجه، دستگاه مورد بحث را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{2x}{1-x^2}=y$$

$$\frac{2y}{1-y^2}=z$$

$$\frac{2z}{1-z^2}=x$$

بنا به فرمول دوبرابر زاویه‌ی تانژانت‌ها، یعنی:

$$tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2a}$$

طبیعی است که جانشینی $x=tg\alpha$ را به ازای $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$، انجام دهیم.

از دو معادله‌ی اول،

$$y=tg2\alpha\ ،\ z=tg4\alpha$$

و معادله‌ی آخر، مستلزم $tg8\alpha=tg\alpha$ می‌شود. درنتیجه، $8\alpha-\alpha=k\pi$، به ازای عدد صحیح kای، برقرار است. بنابراین $\alpha=k\pi/7$، و از آن‌جا که: $\alpha\in(-\pi/2,\pi/2)$، باید داشته باشیم: $-3\le k\le 3$

نتیجه می‌شود که جواب‌های دستگاه عبارت‌اند از:

$$(tg\frac{k\pi}{7},tg\frac{2k\pi}{7},tg\frac{4k\pi}{7})\ ,\ \ k=-3,-2,-1,0,1,2,3$$

۵. فرمول مثلثاتی پنهان در صورت مسئله، فرمول دو برابر زاویه‌ی کتانژانت‌هاست؛ یعنی:

$$2\cot g2\alpha=\cot g\alpha-\frac{1}{\cot g\alpha}$$

این رابطه را می‌توان از فرمول دو برابر زاویه‌ی تانژانت‌ها، یعنی: $tg2\alpha=2tg\alpha/(1-tg^2\alpha)$ با قرار دادن $1/\cot g\alpha$ به‌جای $tg\alpha$، به اثبات رساند.

اگر قرار دهیم: $x_1 = \mathrm{cotg}\,\alpha$ ، $\alpha \in (0,\pi)$ ، آن‌گاه از معادله‌ی اول $x_2 = \mathrm{cotg}\,2\alpha$ ، از معادله‌ی دوم $x_3 = \mathrm{cotg}\,4\alpha$ ، از معادله‌ی سوم $x_4 = \mathrm{cotg}\,8\alpha$ ، و از معادله‌ی آخر $x_1 = \mathrm{cotg}\,16\alpha$ حاصل می‌شود. درنتیجه، $\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,16\alpha$ که مستلزم $16\alpha - \alpha = k\pi$ ، به ازای عدد صحیح k است. در این صورت، جواب‌های

$\alpha = k\pi/15\ ,\ k = 1,2,\dots,14$

را به دست می‌آوریم و جواب‌های دستگاه مفروض عبارت‌اند از:

$x_1 = \mathrm{cotg}\,k\pi/15,\ x_2 = \mathrm{cotg}\,2k\pi/15,$

$x_3 = \mathrm{cotg}\,4k\pi/15, x_4 = \mathrm{cotg}\,8k\pi/15, k = 1,2,3,\dots,14$

۶. فرض می‌کنیم:

$x = tga$ و $y = tgb$

در این صورت:

$$x + y = tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$1 - xy = 1 - tga\,tgb = \frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \cos^2 a$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \cos^2 b$$

نابرابری مورد اثبات، هم‌ارز $-1 \le 2\sin(a+b)\cos(a+b) \le 1$ است، یعنی $-1 \le \sin 2(a+b) \le 1$ ، و کار به انجام می‌رسد.

۷. نخست توجه می‌کنیم که:

$$\frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} = \frac{2x_n}{1-x_n^2}$$

اگر قرار دهیم $x_1 = tg\beta$ ، با $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ ، در این صورت:

$$x_2 = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = tg2\beta$$

و به طور استقرایی به‌دست می‌آوریم:

$$x_n = tg2^{n-1}\beta$$

به این ترتیب:

$$x_8 = tg2^7\beta = tg128\beta$$

برای این‌که دنباله دارای طول ۸ باشد، باید داشته باشیم:

$tg128\beta = \pm 1$

و این مستلزم آن است که، به ازای عدد صحیح kای، داشته باشیم:

$$128\beta = \pm\pi/4 + k\pi$$

به این ترتیب:

$$\beta = \pm\pi/512 + k\pi/128$$

به عبارت دیگر:

$$x = tg(\pm\frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128})$$

برای k، ۱۲۸ مقدار، یعنی $k = 0,1,2,\dots,127$ وجود دارد که به ۲۵۶ مقدار متفاوت x می‌انجامد.

اکنون باید بررسی کنیم تا مطمئن شویم، هیچ‌یک از این مقادیر، دنباله‌ای به طول کمتر از هشت به دست نمی‌دهد. در واقع، برای این‌که دنباله زودتر خاتمه یابد، باید رابطه‌ی

$$\pm\frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128} = \pm\frac{\pi}{2^{r+2}} + m\pi$$

را به ازای اعداد صحیح m و rای، با شرط $7 > r > 0$ ، داشته باشیم. این موضوع مستلزم آن است که:

$$\pm 1 + 4k = \pm 2^{7-r} + 2^9 m$$

اما سمت چپ این معادله فرد و سمت راست آن زوج است که این نمی‌تواند رخ دهد. درنتیجه جمیع ۲۵۶ دنباله، طولی برابر ۸ دارند.

(طرح برای AIME، ۱۹۹۶)

۸. اگر دنباله‌ی $b_1 = tg^{-1}a_1$ و $b_{k+1} = b_k + tg^{-1}(1/k)$ ، $k = 1,2,3,\dots$ را تعریف کنیم، آن‌گاه فرمول جمع مربوط به تانژانت‌ها، یعنی:

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\,tgy}$$

نشان می‌دهد که به ازای هر k:

$$a_k = tgb_k$$

از آن‌جا که $\lim_{x\to 0}\frac{tax}{x} = 1$ ، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{tg^{-1}1/k}{1/k} = 1$$

که با توجه به آن، از یک طرف سری $b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} tg^{-1}\frac{1}{k}$ واگراست، و از طرف دیگر، جمله‌های سری، چون k به بی‌نهایت میل کند، به صفر میل می‌کند. درنتیجه، بی‌نهایت مجموع جزئی سری موردنظر موجود است که در بازه‌های به صورت

$(2\pi n, 2\pi n + \pi/2)$

قرار دارند و بی‌نهایت مجموع جزئی سری، در بازه‌ی $(2\pi n + \pi/2, 2\pi n)$ واقع‌اند.

اما یک مجموع جزئی یک b_m به ازای m وجود دارد و از آن‌جا که $a_m = tgb_m$ ، نتیجه می‌شود که بی‌نهایت a_m مثبت و بی‌نهایت a_m منفی موجود است.

(المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹)

۹. جانشینی مثلثاتی $a_i = \cos x_i$ ، به ازای $x_i \in [0,\pi]$ ، $i = 1,2,\dots,n$ ، عملی طبیعی است. توجه داشته باشید که یکنوایی تابع کسینوس در ترکیب با نابرابری‌های داده شده، نشان می‌دهد که x_iها دنباله‌ای نزولی تشکیل می‌دهند. عبارت سمت چپ به صورت

زیر درمی‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-\cos x_i\cos x_{i+1}-\sin x_i\sin x_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n-1}\sqrt{1-\cos(x_{i+1}-x_i)}$$

$$=\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$$

در این مورد، از فرمول‌های تفریق و دو برابر زاویه استفاده می‌کنیم. تابع سینوسی در $[0,\pi]$ کوژ به سمت پایین است. درنتیجه می‌توان از نابرابری «جنسن»[1] برای به دست آوردن نابرابری زیر استفاده کرد:

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\le\sin\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)$$

درنتیجه:

$$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\le(n-1)\sqrt{2}\sin\frac{x_n-x_1}{2(n-1)}$$

$$\le\sqrt{2}(n-1)\sin\frac{\pi}{2(n-1)}$$

زیرا $x_n-x_1\in(0,\pi)$. بهره‌گیری از این موضوع که، به‌ازای $x>0$، $\sin x<x$، نابرابری زیر را به دست می‌دهد:

$$\sqrt{2}(n-1)\sin\pi/(2(n-1))\le\sqrt{2}\pi/2$$

(برنامه‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۹۹۶)

۱۰. آن‌جا که x_iها مثبت‌اند و مجموعشان ۱ می‌شود، می‌توانیم جانشینی $x_0+x_1+\cdots+x_k=\sin a_k$ با $k=0,1,\cdots,n$ ، $a_0=0<a_1<\cdots<a_n=\pi/2$ را به‌کار ببریم. در این صورت، نابرابری به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin a_k-\sin a_{k-1}}{\sqrt{1-\sin a_{k-1}}\sqrt{1-\sin a_{k-1}}}<\frac{\pi}{2}$$

که می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}\cos\frac{a_k+a_{k-1}}{2}}{\cos a_{k-1}}$$

cosx، به ازای $0\le x\le\pi/2$، تابعی نزولی است و: $\sin x<x$. درنتیجه، سمت چپ نابرابری مورد بحث، اکید کمتر از

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{a_k-a_{k-1}}{2}\cos a_{k-1}}{\cos a_{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=\frac{\pi}{2}$$

می‌شود و مسئله حل شده است.

(المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶)

زیرنویس

1. Jensen

معرفی سایت‌های ریاضی جهان

ادامه‌ی مطالب صفحه‌ی ۱۵

۲۵. منطق و نظریه‌ی مجموعه (Logic & Set Theory)
۲۶. آموزش ریاضی (Mathematics Education)
۲۷. زیست‌شناسی ریاضیاتی (Mathematical Biology)
۲۸. گوناگون (Miscellaneous)
۲۹. حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره (Multivariable Calculus)
۳۰. دینامیک غیرخطی (Nonlinear Dynamics)
۳۱. نظریه‌ی اعداد (Number Theory)
۳۲. آنالیز عددی (Numerical Analysis)
۳۳. معادلات دیفرانسیل معمولی (Ordinary Differential Educations)
۳۴. معادلات دیفرانسیل جزئی (Partial Differential Educations)
۳۵. حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی (Pre-Calculus)
۳۶. نظریه‌ی احتمال (Probabilitly Theory)
۳۷. آمار (Statistics)
۳۸. توپولوژی (Topology)
۳۹. مثلثات (Trigonometry)

ب) روش دیگر، نوشتن کلمه‌ی کلیدی و مورد نظر در قالب یک کلمه‌ی تنها، یک عبارت تنها و یا چندین کلمه‌ی جداگانه در قسمت مخصوص جست‌وجوی این سایت است. برای مثال، اگر مایل هستید، اطلاعاتی را به صورت کلی در زمینه‌ی «نظریه گراف‌ها» به‌دست آورید، می‌باید عبارت «Graph Theory» را در قسمت جست‌وجو بنویسید. اما اگر می‌خواهید که اطلاعاتی بیشتری درباره‌ی نظریه‌ی گراف‌ها، مثلاً پیرامون «ماتریس مجاورت گراف ساده» کسب کنید، کافی است عبارت «Adjacency Matrix of a Simple Graph» را در قسمت جست‌وجو بنویسید و به جست‌وجو بپردازید.

در سایت Math Archives قسمتی نیز به دانشگاه‌ها، کالج‌ها و انجمن‌های ریاضیات و گروه‌های ریاضی مرتبط با آن‌ها اختصاص داده شده است. در این بخش مخاطب می‌تواند، به اطلاعات گروه‌های ریاضی دانشگاه‌ها، کالج‌ها و انجمن‌های گوناگونی که اسم آن‌ها در اینترنت قرار داده شده است، از طریق انتخاب حروف الفبا دست‌رسی پیدا کند. برای مثال، شخصی که مایل است آگاهی‌هایی در مورد گروه ریاضی دانشگاه تگزاس دریافت کند، کافی است حرف «T» و فردی که به‌دنبال گروه ریاضی دانشگاه اوکلاهاما می‌باشد، کافی است، حرف O را انتخاب کند.