

کاربردهای

از قضیه‌ی

لاگرانژ



اشاره

مشتق و مطالب مربوط به آن، نقش مهمی در ریاضیات، دوره‌ی متوسطه ایفا می‌کند، اما کاربرد قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن در حل مسائل ریاضیات مقدماتی، تقریباً نادیده انگاشته شده است. اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی، هم‌چنین تبدیل عبارت‌های جبری به حاصل ضرب، حل معادله، حل نامعادله، حل دستگاه معادله‌ها، معادله‌های پارامتری و... با استفاده از این قضیه امکان‌پذیر است.

برای این منظور، روش کلی قابل قبولی درباره‌ی حل بعضی مسائل ارائه می‌شود که می‌توان آن‌ها را چه با این روش و چه با روش‌های دیگر حل کرد. در این جا با این گونه مسائل آشنا خواهید شد. ابتدا با قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن آشنا می‌شویم:

قضیه‌ی لاگرانژ (میانگین)

اگر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و در تمام نقاط بازه‌ی (a, b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

نتیجه ۱. (شرط ثابت بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و مشتق آن در داخل این بازه صفر باشد، آن‌گاه تابع در بازه $[a, b]$ ثابت است.

نتیجه ۲. اگر دو تابع f و g در بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشند و در داخل این بازه مشتق‌های مساوی داشته باشند، اختلاف آن‌ها تنها در مقادیر ثابت خواهد بود.

نتیجه ۳. (شرط یکنوا بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ای مانند I پیوسته و مشتق آن در آن بازه مثبت (منفی) باشد، آن‌گاه تابع f در این بازه صعودی (نزولی) است. با این مقدمه به حل مسائل می‌پردازیم. همان‌طور که گفته شد، قضیه‌ی لاگرانژ در حل معادله‌ها،

نامعادله‌ها، تعیین تعداد ریشه‌ها و... کاربرد دارد. برای این منظور، در روند حل مسائل، تابعی مانند f در نظر گرفته می‌شود که قضیه‌ی لاگرانژ در بازه‌ای مانند $[a, b]$ در آن صدق کند. پس

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{با استفاده از فرمول لاگرانژ:}$$

که در آن $c \in (a, b)$ مقدار $f'(c)$ محاسبه می‌شود.

مثال ۱. ثابت کنید اگر $x \geq 1$ ، آن‌گاه $e^x \geq ex$

اثبات: نامساوی به ازای $x = 1$ برقرار است. تابع f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = e^x - ex$$

به ازای هر $b > 1$ در بازه‌ی $[1, b]$ ، شرایط قضیه‌ی لاگرانژ در این تابع صدق می‌کند. پس در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ طوری که

$$\frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{e^b - eb}{b - 1} = e^c - e$$

چون $c > 1$ پس $e^c > e$ و بنابراین $e^c - e > 0$ و از آن‌جا:

$$\frac{e^b - eb}{b - 1} > 0 \Rightarrow e^b - eb > 0$$

یعنی به ازای $b > 1$ داریم:

قضیه ی لاگرانژ در آن صدق می کند:

$$\frac{f(\pi/8) - f(\pi/6)}{\pi/8 - \pi/6} = f'(c), \quad \pi/6 < c < \pi/8$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Arc sin } \pi/8 - \text{Arc sin } \pi/6}{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

مقدار $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$ را در بازه ی $\pi/6 < c < \pi/8$ تعیین می کنیم:

$$\pi/36 < 1-c^2 < \pi/64$$

$$\pi/6 < \sqrt{1-c^2} < \pi/8$$

$$\frac{5}{4} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{5}{3}$$

از آن جا نتیجه می شود:

$$\frac{1}{4} < \text{Arc sin } \pi/8 - \text{Arc sin } \pi/6 < \frac{1}{3}$$

مثال ۴. ثابت کنید به ازای هر x_1 و x_2 حقیقی، نامساوی زیر برقرار است:

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

اثبات: به ازای $x_1 = x_2$ نامساوی بالا برقرار است. فرض کنیم $x_1 \neq x_2$ تابع $f(x) = \cos x$ را به ازای $x_1 < x_2$ در بازه ی $[x_1, x_2]$ و به ازای $x_1 > x_2$ در بازه ی $[x_2, x_1]$ در نظر می گیریم. شرایط قضیه ی لاگرانژ در این تابع صدق می کند؛ بنابراین نقطه ای به طول c در این بازه وجود دارد، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c)$$

$$\frac{\cos x_1 - \cos x_2}{x_1 - x_2} = -\sin c$$

$$\Rightarrow |\cos x_1 - \cos x_2| = |x_1 - x_2| \cdot |-\sin c|$$

چون $|\sin c| \leq 1$ ، پس:

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$$

مثال ۵. ثابت کنید معادله ی $\cos^2 \frac{x}{2} + 2^{\cos x} = 2$ در بازه ی $(\pi/2, \pi)$ بیش از دو ریشه ی حقیقی ندارد.

$$e^b > eb$$

و از آن جا نتیجه می شود که به ازای $x \geq 1$ داریم:

$$e^x \geq ex$$

در حالت خاص، به ازای $x = c+1$ داریم:

$$e^{c+1} \geq e(c+1) \Rightarrow e^c \geq c+1$$

که در آن c می تواند هر عدد دلخواه حقیقی باشد.

مثال ۲. ثابت کنید به ازای $x \geq 0$ داریم:

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$$

اثبات: فرض کنیم b عددی دلخواه و مثبت باشد. در بازه ی $[0, b]$ تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

بنابر قضیه ی لاگرانژ داریم:

$$\frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = f'(c)$$

$$0 < c < b \Rightarrow \frac{e^b - \frac{b^2}{2} - 1}{b} = e^c - c$$

چون به ازای هر c داریم: $e^c \geq c+1$ (مثال ۱ را نگاه کنید)، پس:

$$e^c - c \geq c+1-c \Rightarrow e^c - c \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^b - \frac{b^2}{2} - 1}{b} \geq 1 \Rightarrow e^b - \frac{b^2}{2} - 1 \geq b$$

یعنی به ازای هر $b > 0$ داریم:

$$e^b \geq 1+b+\frac{b^2}{2}$$

پس به ازای هر $x > 0$ خواهیم داشت:

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$$

مثال ۳. ثابت کنید:

$$\frac{1}{4} < \text{Arc sin } \pi/8 - \text{Arc sin } \pi/6 < \frac{1}{3}$$

اثبات: تابع $f(x) = \text{Arc sin } x$ را در بازه ی $[\pi/6, \pi/8]$ در نظر می گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق پذیر است. پس

اثبات: فرض کنیم معادله در این بازه حداقل سه ریشه ی x_1 و x_2 و x_3 داشته باشد، طوری که $x_1 < x_2 < x_3$ و بنابراین، x_1 و x_2 و x_3 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x) = 2 - \cos^2 \frac{x}{2} - 2^{\cos x}$$

یعنی:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$$

در هر یک از بازه های $[x_1, x_2]$ و $[x_2, x_3]$ ، شرایط لاگرانژ درباره ی تابع صدق می کند. پس c_1 و c_2 هایی به ترتیب از بازه های (x_1, x_2) و (x_2, x_3) وجود دارند؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(c_2)$$

چون: $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ پس $f'(c_1) = 0$ و $f'(c_2) = 0$

مشتق تابع را پیدا می کنیم:

$$f'(x) = 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2^{\cos x} \cdot \sin x \cdot \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} \sin x + \sin x \cdot 2^{\cos x} \ln 2 = \sin x \left(\frac{1}{2} + 2^{\cos x} \ln 2 \right)$$

چون $\frac{1}{2} + 2^{\cos x} \ln 2 > 0$ ، پس از معادله ی $f'(x) = 0$ نتیجه می شود:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

یعنی در بازه ی $(0, 2\pi)$ تنها یک ریشه ی منحصر به فرد وجود دارد و این تناقض است، زیرا c_1 و c_2 ، $c_1 \neq c_2$ باید ریشه های $f'(x) = 0$ باشند.

از آن جا نتیجه می شود معادله $2 - \cos^2 \frac{x}{2} - 2^{\cos x} = 0$ در بازه ی $(0, 2\pi)$ بیش از دو ریشه ی حقیقی ندارد.

مثال ۶. معادله ی $x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = 0$ را حل کنید.

حل: به آسانی می توان دید که $x_1 = 1$ ریشه ی معادله است. فرض کنیم معادله یک ریشه ی حقیقی دیگر مانند x_2 داشته باشد. در این صورت x_1 و x_2 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 50x - 41$$

از آن جا نتیجه می شود:

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

قضیه ی لاگرانژ به ازای $x_1 < x_2$ در بازه ی $[x_1, x_2]$ و به ازای $x_1 > x_2$ در بازه ی $[x_2, x_1]$ صدق می کند. پس در این بازه ها عددی مانند c موجود است، به طوری که:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

چون $f(x_1) = f(x_2) = 0$ پس: $f'(c) = 0$. یعنی c ریشه ی معادله ی $f'(x) = 0$ است. اما داریم:

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 50$$

دیده می شود که مشتق به ازای هر x ، مثبت است (مبین $f'(x) = 0$ نسبت به x^2 منفی و ضریب x^4 مثبت است $5 > 0$ و $\Delta = (30)^2 - 1000 < 0$ و $5y^2 - 30y + 50 = 0 \Rightarrow x^2 = y$) یعنی $f'(x) = 0$ جواب ندارد و این یک تناقض است. بنابراین $x_1 = 1$ ریشه ی منحصر به فرد معادله ی مفروض است.

مثال ۷. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی زیر را پیدا کنید.

$$y = (x^3 - x)(x - 8)(x - 9)$$

حل: چون تابع از درجه ی پنجم است، پس مشتق آن کثیرال جمله ای از درجه ی چهارم خواهد بود و بنابراین بیش از چهار ریشه ی حقیقی نخواهد داشت.

قضیه ی لاگرانژ را برای تابع:

$$f(x) = (x+1)(x)(x-1)(x-8)(x-9)$$

در بازه های $[-1, 0]$ و $[0, 1]$ و $[1, 8]$ و $[8, 9]$ به کار می بریم. داریم:

$$f(-1) = f(0) = f(1) = f(8) = f(9) = 0$$

در داخل هر یک از این فواصل، به ترتیب x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 یافت می شوند، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(-1) - f(0)}{-1 - 0} = f'(x_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(0) - f(1)}{0 - 1} = f'(x_2)$$

$$\frac{f(1) - f(8)}{1 - 8} = f'(x_3) \quad \text{و} \quad \frac{f(8) - f(9)}{8 - 9} = f'(x_4)$$

دیده می شود:

$$f'(x_1) = 0, \quad f'(x_2) = 0, \quad f'(x_3) = 0, \quad f'(x_4) = 0$$

چون x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 ریشه های کثیرال جمله ی $f'(x) = 0$ هستند که از درجه ی چهارم است، پس برای $f'(x)$ ریشه های متمایز دیگری وجود ندارد. بنابراین، تابع با ضابطه ی

$$y = (x^3 - x)(x - 8)(x - 9)$$

چهار نقطه ی بحرانی دارد.

اکنون نتایج ۱ و ۲ قضیه‌ی لاگرانژ را در اثبات این مطالب به کار می‌بریم:

۱. اثبات اتحادها و در حالت خاص استنتاج فرمول‌های ریاضی مقدماتی؛

۲. ساده کردن عبارت‌های جبری؛

۳. تبدیل عبارت‌های جبری به صورت حاصل ضرب عوامل.

برای این منظور، بازه‌های تابع f را طوری انتخاب می‌کنیم که مشتق تابع در آن بازه‌ها صفر باشد و در نتیجه از تساوی $f'(x) = 0$ ، ثابت بودن تابع را نتیجه می‌گیریم:

یا به جای یک تابع، دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

و از آن جا:

که در آن c مقدار ثابتی است و برای تعیین آن به جای x ، مقدار معینی مانند x_1 قرار می‌دهیم و c را به دست می‌آوریم (تساوی بالا به ازای هر x حقیقی برقرار است).

مثال ۸. بدون استفاده از اتحادهای مثلثاتی ثابت کنید:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos 2x - 2\cos^2 x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع به ازای همه‌ی مقادیر x پیوسته و مشتق پذیر است. داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin 2x + 4\cos x \sin x \\ &= -2\sin 2x + 4\cos x \sin x = -2\sin 2x + 2\sin 2x = 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 0 \Rightarrow f(x) = c \end{aligned}$$

برای تعیین c در تابع $f(x)$ ، به جای x قرار می‌دهیم $x = 0$. از آن جا داریم:

$$\begin{aligned} f(0) &= c = \cos 0 - 2\cos^2 0 \Rightarrow c = -1 \\ \Rightarrow f(x) &= -1 \Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 x = -1 \\ \Rightarrow \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

مثال ۹. اگر $-1 \leq x \leq 1$ ، آنگاه ثابت کنید:

$$\text{Arc cos}(-x) = \pi - \text{Arc cos } x$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \text{Arc cos}(-x) + \text{Arc cos } x$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ در نظر می‌گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق آن صفر است:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

پس به ازای هر x از این بازه داریم: $f(x) = c$
به ازای $x = 0$ داریم:

$$f(0) = c = \text{Arc cos } 0 + \text{Arc cos } 0$$

$$c = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow f(x) = \text{Arc cos}(-x) + \text{Arc cos } x = \pi$$

پس به ازای $-1 \leq x \leq 1$ داریم:

$$\text{Arc cos}(-x) = \pi - \text{Arc cos } x$$

مثال ۱۰. ثابت کنید به ازای $x < 0$ تساوی زیر برقرار است:

$$\text{Arc tan } x = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{2}$$

اثبات: دو تابع با ضابطه‌ی زیر را در بازه‌ی $[-\infty, 0]$ در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = \text{Arctg } x \quad \text{و} \quad g(x) = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

هر دو تابع در بازه‌ی $[b, 0]$ پیوسته هستند. مشتق آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{و}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x}{|x|(1+x^2)}$$

چون به فرض $x < 0$ ، پس:

$$|x| = -x, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

یعنی در بازه‌ی $[b, 0]$ مشتق این دو تابع مساوی اند:

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x = -1$:

$$\text{Arctg}(-1) = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{2}} + c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

پس به ازای $x < 0$ داریم:

$$\text{Arctg } x = \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\pi}{2}$$

ادامه دارد...