حل هندسی چند معادله (۱)

● دکتر احمد شرف‌الدین

اشاره

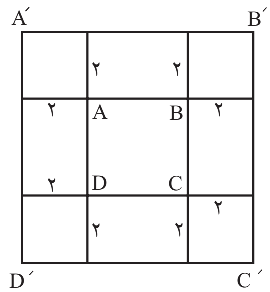
مطالعه‌ی این مقاله می‌تواند سرگرمی آموزنده‌ای برای دانش‌آموزان باشد. در این‌جا، چند معادله را به کمک هندسه حل می‌کنیم. در بعضی موارد، حل‌های هندسی جذاب‌اند و موضوع را محسوس و ملموس می‌کنند.

حل معادله‌ی درجه دوم به کمک هندسه

الف) حل خوارزمی: با یک مثال، راه‌حل خوارزمی را بیان می‌کنیم:

می‌خواهیم معادله‌ی درجه دوم زیر را حل کنیم:

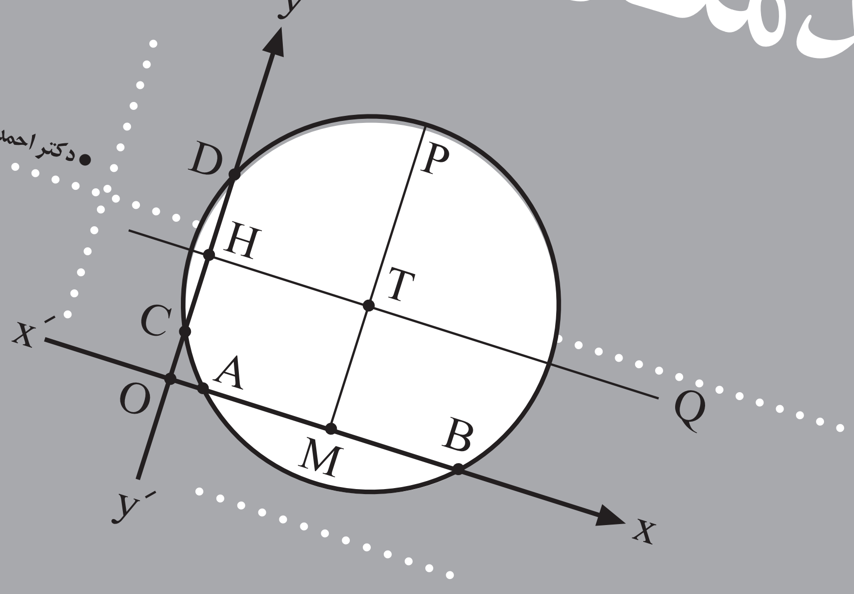
$$x^۲ + ۸x = ۳۳ \qquad (۱)$$



مربع ABCD را در نظر می‌گیریم و طول ضلع آن را x می‌نامیم. هر ضلع مربع را از دو طرف آن به اندازه‌ی ۲ واحد امتداد می‌دهیم و سپس مربع $A'B'C'D'$ را می‌سازیم. طول ضلع مربع $A'B'C'D'$ برابر است با: $x + ۴$. مساحت مربع ABCD برابر $x^۲$ است. مجموع مساحت‌های مربع ABCD و چهار مستطیل اطراف آن برابر است با: $x^۲ + ۸x$. مساحت مربع $A'B'C'D'$ از مجموع مساحت‌های چهار مربع با ضلع ۲ واحد، مجموع مساحت‌های چهار مستطیل اطراف مربع ABCD و مساحت مربع ABCD به‌دست می‌آید. پس مساحت مربع $A'B'C'D'$ برابر است با:

$$x^۲ + ۸x + ۱۶ \qquad (۲)$$

با ملاحظه‌ی شکل معلوم می‌شود که مساحت مربع $A'B'C'D'$ چنین است:



(۳) $(x+۴)^۲$

و نیز:

(۴) $(x+۴)^۲ = x^۲+۸x+۱۶$

برای حل معادله‌ی ۱، معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$x^۲+۸x+۱۶ = ۳۳+۱۶$

و یا:

(۵) $x^۲+۸x+۱۶ = ۴۹$

معادله‌ی ۵ با رعایت تساوی ۴ به صورت زیر نوشته می‌شود:

(۶) $(x+۴)^۲ = ۴۹$

از معادله‌ی ۶ معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

(۷) $x+۴ = ۷$

خوارزمی اعداد منفی به‌کار نمی‌برده است. از معادله‌ی ۷ نتیجه می‌شود: $x = ۳$

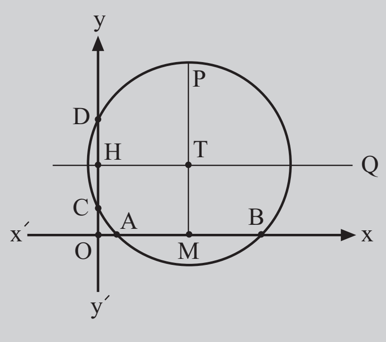
ب) حل هندسی معادله‌ی درجه دوم با به‌کارگیری عددهای جبری: معادله‌ی درجه دوم زیر را که ضریب‌های آن اعداد جبری هستند، درنظر می‌گیریم:

(۱) $x^۲+px+q = ۰$

اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله‌ی ۱ باشند، چنین داریم:

(۲)
$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}(x_۱+x_۲) = -\frac{p}{۲} \\ x_۱x_۲ = q \end{cases}$$

دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ را در نظر می‌گیریم.



روی محور $x'x$ نقطه‌ی M را طوری اختیار می‌کنیم که اندازه‌ی جبری $\overline{OM}$ برابر $-\frac{p}{۲}$ باشد. روی محور $y'y$ نقطه‌های C و D را طوری اختیار می‌کنیم که اندازه‌های جبری $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$ به ترتیب برابر ۱ و q باشد. خط HQ عمودمنصف پاره‌خط CD را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی M خط MP را بر خط $x'x$ عمود می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد دو خط HQ و MP را T می‌نامیم.

دایره‌ای به مرکز T و شعاع TC رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این دایره با خط $x'x$ را A و B می‌نامیم. نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB است، زیرا در دایره‌ی به مرکز T خط TM بر وتر AB عمود است. پس:

(۳) $$\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{۲} = \overline{OM}$$

چون $\overline{OC} = ۱$ و $\overline{OD} = q$، پس:

(۴) $\overline{OC}.\overline{OD} = q$

بنابر قضیه‌ی «قوت نقطه»، چنین داریم:

(۵) $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OC}.\overline{OD}$

از دو رابطه‌ی ۴ و ۵ نتیجه می‌شود:

(۶) $\overline{OA}.\overline{OB} = q$

چون نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB است، پس:

(۷) $\overline{OA}+\overline{OB} = -\frac{p}{۲}$

از دو رابطه‌ی ۶ و ۷ نتیجه می‌شود که اندازه‌های $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ جواب‌های معادله‌ی درجه دوم ۱ هستند.

بحث: شرط وجود جواب آن است که دایره‌ی به مرکز T و شعاع TC خط $x'x$ را قطع کند یا بر آن مماس باشد. یعنی باید شرط زیر برقرار باشد:

(۸) $\overline{TC} \geq \overline{TM}$

چنین داریم:

$$\overline{TC}^۲ = \overline{HC}^۲+\overline{HT}^۲ = \overline{HC}^۲+\overline{OM}^۲$$

(۹) $$\overline{TC}^۲ = (\frac{q-۱}{۲})^۲+(-\frac{p}{۲})^۲$$

$$\overline{TM} = \overline{OH} = \frac{\overline{OC}+\overline{OD}}{۲}$$

(۱۰) $$\overline{TM} = \frac{۱+q}{۲}$$

با توجه به تساوی‌های ۹ و ۱۰، رابطه‌ی ۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

(۱۱) $$(\frac{q-۱}{۲})^۲+(\frac{-p}{۲})^۲ \geq (\frac{۱+q}{۲})^۲$$

از رابطه‌ی ۱۱، رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود که شرط وجود جواب است:

$p^۲-۴q \geq ۰$

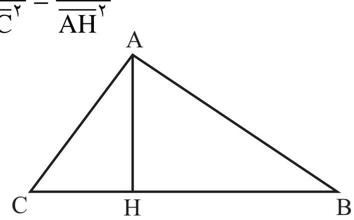
مسئله: دستگاه معادلات زیر را با روش هندسی حل کنید.

(۱)
$$\begin{cases} \frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{y^۲} = \frac{۱}{a^۲} \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} = \frac{۱}{b} \end{cases} \qquad (b>۰)$$

برای حل این دستگاه معادلات، دو حکم هندسی زیر را به کار می‌گیریم:

حکم۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع است، رابطه‌ی زیر برقرار است:

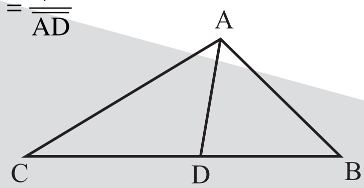
$$\frac{۱}{\overline{AB}^۲}+\frac{۱}{\overline{AC}^۲}=\frac{۱}{\overline{AH}^۲}$$



حکم۲.

الف) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه است و AD نیم‌ساز زاویه‌ی A، رابطه‌ی زیر برقرار است:

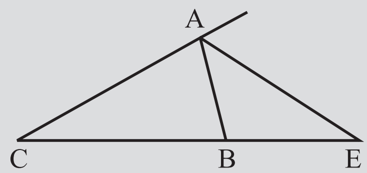
$$\frac{۱}{\overline{AB}}+\frac{۱}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{۲}}{\overline{AD}}$$



ب) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که A رأس زاویه‌ی قائمه و AE نیم‌ساز خارجی است، رابطه‌ی زیر برقرار است:

اگر: $\overline{AB}<\overline{AC}$

$$\frac{۱}{\overline{AB}}-\frac{۱}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{۲}}{\overline{AE}}$$



برهان حکم۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC دو رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲=\overline{BC}^۲ \qquad (۲)$$

$$\overline{AB}.\overline{AC}=\overline{BC}.\overline{AH} \qquad (۳)$$

دو طرف تساوی ۲ را بر دو طرف تساوی ذیل بخش می‌کنیم، رابطه‌ی مطلوب به‌دست می‌آید.

$$\overline{AB}^۲.\overline{AC}^۲=\overline{BC}^۲.\overline{AH}^۲$$

برهان حکم۲.

الف) برهان در مورد نیم‌ساز داخلی مثلث: می‌خواهیم ثابت کنیم، اگر در مثلث ABC، l طول نیم‌ساز داخلی باشد، رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{۱}{\overline{AB}}+\frac{۱}{\overline{AC}}=\frac{۲\cos\frac{A}{۲}}{l} \qquad (۴)$$

برای اثبات، حکم زیر را که مساحت مثلث را بر حسب طول دو ضلع و سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع به‌دست می‌دهد، به‌کار می‌گیریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\overline{AB}.\overline{AC}.\sin A$$

مساحت‌های مثلث‌های ABC، ADB و ADC را به ترتیب S، $S_۱$ و $S_۲$ می‌نامیم و چنین داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\overline{AB}.\overline{AC}.\sin A$$

$$S_۱=\frac{۱}{۲}\overline{AB}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{۲}$$

$$S_۲=\frac{۱}{۲}\overline{AC}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{۲}$$

و چون $S=S_۱+S_۲$، پس:

$$\frac{۱}{۲}\overline{AB}.\overline{AC}.\sin A=\frac{۱}{۲}\overline{AB}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}\overline{AC}.\overline{AD}.\sin\frac{A}{۲}$$

از رابطه‌ی اخیر، با توجه به دستور مثلثاتی $\sin A=۲\sin\frac{A}{۲}.\cos\frac{A}{۲}$، رابطه‌ی ۴ حاصل می‌شود.

حالت خاص: اگر زاویه‌ی A قائمه باشد، چنین داریم:

$$\cos\frac{A}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

در این صورت رابطه‌ی ۴ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{\overline{AB}}+\frac{۱}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{۲}}{l}$$

ب) برهان حکم ۲ در مورد نیم‌ساز خارجی مثلث: می‌خواهیم ثابت کنیم، اگر در مثلث ABC، l طول نیم‌ساز خارجی باشد، رابطه‌ی زیر مسلم است:

$$\frac{۱}{\overline{AB}}-\frac{۱}{\overline{AC}}=\frac{۲\cos\frac{A}{۲}}{l} \qquad (\overline{AB}<\overline{AC})$$