

مفهوم حدتابع در یک نقطه

احمد قندهاری

برای دانش آموزان سال سوم

۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲ به ۲ نزدیک کنیم، ولی به ۲ نرسد؛ به این شکل:

$$x = 1, \dots, 1/4, \dots, 1/7, \dots, 1/9, 1/99, 1/999, 1/9999, 1/99999, \dots$$

ملاحظه می کنید که هرچه تعداد ۹های سمت راست ممیز را زیاد

کنیم، عدد حاصل مرتباً به عدد ۲ نزدیک و نزدیک تر می شود، ولی به آن نمی رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به ۲ نزدیک شده

است، می نویسیم:

$$x \rightarrow 2^-$$

حال x را از طرف اعداد بزرگ تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می کنیم؛

به این شکل:

$$x = 3, \dots, 2/7, \dots, 2/3, \dots, 2/1, 2/0.1, 2/0.01, 2/0.001, 2/0.0001, \dots$$

باز هم ملاحظه می کنیم، هرچه تعداد ۰های بین ممیز و عدد ۱ را

زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک تر می شود، ولی به آن نمی رسد.

چون x از طرف اعداد بزرگ تر از ۲ به ۲ نزدیک شده است،

می نویسیم:

$$x \rightarrow 2^+$$

همسایگی

نامساوی $|x - 2| < 1$ را در نظر می گیریم و آن را حل می کنیم؛ به

این صورت:

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

$$\begin{aligned} 0 < 1-x < 0.1 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0.2 \\ 0 < 1-x < 0.01 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0.02 \\ 0 < 1-x < 0.001 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0.002 \\ 0 < 1-x < 0.0001 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0.0002 \\ 0 < 1-x < 0.00001 &\Rightarrow |f(x)-3| < 0.00002 \end{aligned}$$

این نتایج را به صورت زیر هم می توان نشان داد:

$$\begin{aligned} 0 < 1-x < 0.1 &\text{ باید } |f(x)-3| < 0.2 \text{ اگر بخواهیم} \\ 0 < 1-x < 0.01 &\text{ باید } |f(x)-3| < 0.02 \text{ اگر بخواهیم} \\ 0 < 1-x < 0.001 &\text{ باید } |f(x)-3| < 0.002 \text{ اگر بخواهیم} \\ 0 < 1-x < 0.0001 &\text{ باید } |f(x)-3| < 0.0002 \text{ اگر بخواهیم} \\ 0 < 1-x < 0.00001 &\text{ باید } |f(x)-3| < 0.00002 \text{ اگر بخواهیم} \end{aligned}$$

می توان گفت، $f(x)$ را به حد خودش به هر اندازه که بخواهیم می توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه ی کافی به عدد ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می گیریم و $x \rightarrow 1^-$ می خواهیم $|f(x)-3| < \frac{1}{25}$ تعیین کنید x را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل: چنین عمل می کنیم:

$$|f(x)-3| < \frac{1}{25} \Rightarrow |(2x+1)-3| < \frac{1}{25} \Rightarrow |2x-2| < \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow 2|x-1| < \frac{1}{25} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{50} \Rightarrow 0 < 1-x < \frac{1}{50}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن قدر نزدیک شود تا فاصله اش با آن، کمتر از $\frac{1}{50}$ شود.

پس اگر بخواهیم $f(x)$ به عدد ۳ به حدی نزدیک شود که فاصله ی $f(x)$ از عدد ۳ کمتر از $\frac{1}{25}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱

آن قدر نزدیک کنیم تا فاصله ی ۱ تا عدد x ، کمتر از $\frac{1}{50}$ شود.

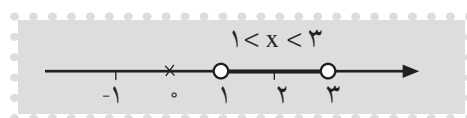
تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x)-3| < \frac{1}{77}$ باشد،

تعیین کنید x را از سمت چپ چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

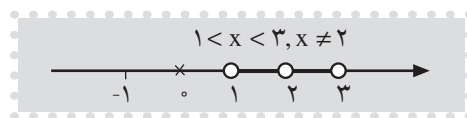
$$\text{جواب: } 0 < 1-x < \frac{1}{144}$$

عدد میانی، بازه ی (۱ و ۳)، عدد (۲) است. فرض می کنیم $x = 2$ ، اگر x را مرکز قرار دهیم، آن گاه بازه ی (۱ و ۳) را یک همسایگی متقارن به مرکز $x = 2$ به شعاع ۱ گوئیم.

چنانچه از بازه ی (۱ و ۳)، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $\{2\} - (1, 3)$ ، آن گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف شده) عدد ۲ به شعاع ۱ می گوئیم



همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱

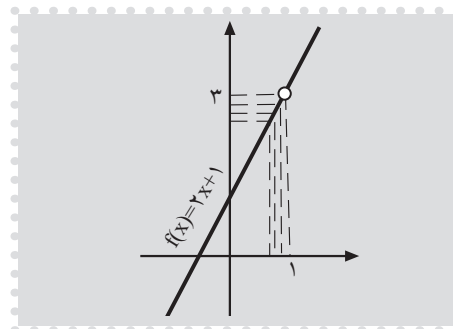
توجه: در حالت کلی، نامساوی $|x-a| < r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r می گوئیم.

حد چپ

بررسی حد چپ تابع را با یک مثال شروع می کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه ی $f(x) = 2x + 1$ باشد. می خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
$f(x)$	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچک تر از ۱ به ۱ نزدیک و نزدیک تر می شود، رفتار تابع نشان می دهد که $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک و نزدیک تر می شود. به نظر می رسد، وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، آن گاه حد $f(x)$ برابر ۳ است. از جدول بالا، این نتایج به دست می آید:



تعریف حد چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (a, x_0) تعریف شده باشد. می‌گوییم حد چپ تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^-$ ، عدد حقیقی L است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x < x_0$ را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

تمرین: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 2^-} (4x + 3) = 11$. می‌خواهیم

$$\frac{1}{4} < |(4x + 3) - 11| < \frac{1}{40} \quad \text{تعیین کنید } x \text{ را چه قدر از سمت چپ } 2 \text{ به عدد } 2 \text{ نزدیک کنیم.}$$

$$\text{جواب: } \frac{1}{160} < 2 - x < \frac{1}{40}$$

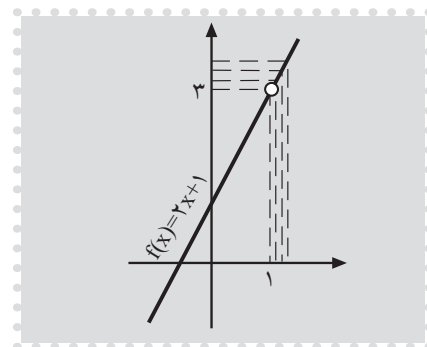
حد راست تابع

دوباره تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x از طرف اعداد بزرگ‌تر از 1 به عدد 1 نزدیک شود: یعنی $x \rightarrow 1^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به همین علت، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

x	$1/1$	$1/0.1$	$1/0.01$	$1/0.001$	$1/0.0001$
$f(x)$	$3/2$	$3/0.2$	$3/0.02$	$3/0.002$	$3/0.0002$

ملاحظه می‌کنیم، وقتی $x > 1$ و به عدد 1 نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که مقدار تابع $(f(x))$ به عدد 3 نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به نظر می‌رسد، وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، آن‌گاه حد $f(x)$ برابر 3 است.

از این جدول، نتایج زیر به دست می‌آیند.



$$0 < x - 1 < 0.1 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.2$$

$$0 < x - 1 < 0.01 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.02$$

$$0 < x - 1 < 0.001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.002$$

$$0 < x - 1 < 0.0001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.0002$$

$$0 < x - 1 < 0.00001 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.00002$$

این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0.2 \text{، باید } 0 < x - 1 < 0.1$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0.02 \text{، باید } 0 < x - 1 < 0.01$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0.002 \text{، باید } 0 < x - 1 < 0.001$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0.0002 \text{، باید}$$

$$0 < x - 1 < 0.00001$$

$$\text{اگر بخواهیم } |f(x) - 3| < 0.00002 \text{، باید}$$

$$0 < x - 1 < 0.000001$$

می‌توان گفت، می‌توانیم $|f(x) - 3|$ را به هر اندازه که

بخواهیم، کوچک کنیم، به شرطی که x را از سمت راست به عدد 1 به اندازه‌ی کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم

و $x \rightarrow 1^+$. می‌خواهیم $|f(x) - 3| < \frac{1}{75}$. تعیین کنید x را چه قدر باید به عدد 1 نزدیک کنیم.

حل:

$$|f(x) - 3| < \frac{1}{75} \Rightarrow |2x + 1 - 3| < \frac{1}{75} \Rightarrow |2(x - 1)| < \frac{1}{75}$$

$$\Rightarrow 2|x - 1| < \frac{1}{75} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{150} \Rightarrow 0 < x - 1 < \frac{1}{150}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از 1 به عدد 1 آن قدر باید نزدیک

کنیم تا $x - 1$ کمتر از $\frac{1}{150}$ شود.

تعریف حد راست تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (x_0, b) تعریف شده باشد.

می‌گوییم حد راست تابع f وقتی $x \rightarrow x_0^+$ ، عدد حقیقی L

است، اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم،

به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از x_0 به اندازه‌ی کافی به

x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

مثال: داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-4x + 3) = -1$. می‌خواهیم

$$\frac{1}{30} < |(-4x + 3) + 1| < \frac{1}{300}$$

آن‌گاه x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از 1 چه قدر باید به عدد 1

نزدیک کنیم؟

قضایای حد

۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} b = b \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad (\text{ج})$$

۲. فرض می‌کنیم a و b و L اعداد حقیقی و $n \in \mathbb{N}$ و

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \quad \text{آن گاه داریم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} b f(x) = b L_1 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0 \quad (\text{د})$$

۳. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot 0 = 0$$

۴. اگر $f(x) = m_n x^n + m_{n-1} x^{n-1} + \dots + m_1 x + m_0$ یک چند جمله‌ای

از درجه‌ی n باشد، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m_n a^n + m_{n-1} a^{n-1} + \dots + m_1 a + m_0$$

۵. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

۶. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $L \geq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

۷. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ و f و g در

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{آن گاه}$$

۸. حد یک تابع در $x = a$ ، در صورت وجود، یکتاست.

مثال: به کمک قضیه‌های حد، مقدار حدهای زیر را محاسبه

کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 8x}{x^3 + 4x - 1} \quad (\text{الف})$$

حل:

$$\frac{1}{300} < |-4x + 3| + 1 < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4x + 4| < \frac{1}{300} \Rightarrow |-4(x-1)| < \frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow 4|x-1| < \frac{1}{300} \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{1200} \Rightarrow 0 < x-1 < \frac{1}{1200}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن قدر باید نزدیک

کنیم تا $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1200}$ باشد.

تعریف حد تابع در x_0

فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد

(ممکن است تابع در خود x_0 تعریف نشده باشد).

می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L است،

اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کنیم، به شرطی

که x را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت

می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

به عبارت دیگر، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow x_0$ ، برابر عدد حقیقی L

است، اگر بتوانیم $|f(x) - L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک

کنیم، به شرطی که $|x - x_0|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3x - 5$ را در نظر می‌گیریم.

اگر $x \rightarrow 1$ ، آن گاه حد $f(x)$ برابر (-2) است. می‌خواهیم

$$\frac{1}{100} < |f(x) + 2| < \frac{1}{100} \quad \text{آن گاه } x \text{ را چه قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟}$$

حل:

$$\frac{1}{100} < |3x - 5 + 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{100} < |3x - 3| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} < |3(x-1)| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{300} < |x-1| < \frac{1}{300}$$

$$\text{یا } 0 < |x-1| < \frac{1}{300}$$

پس x را آن قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم تا $|x-1|$ (که مثبت

است) کوچک‌تر از $\frac{1}{300}$ باشد.

توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ ، آن گاه

می‌گوییم تابع f در x_0 حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.