

مسائلی برای حل

ریاضیات ۱

مجتبی رفیعی



۱. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k+1)$ عضوی، ۴۸ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(k+3)$ عضوی کمتر است، حاصل $(k^2 - k + 1)$ را بیابید.

۲. فرض کنید a کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $N = 35 \times 67 \times 135 \times a$ مربع کامل یک عدد طبیعی باشد، در این صورت مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت a را بیابید.

۳. اگر عدد $0.6\overline{24} / b$ به کسر تحویل‌ناپذیر $\frac{a}{b}$ تبدیل شود، آن‌گاه مجموع رقم‌های دهگان اعداد a و b را بیابید.

۴. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۵. خارج‌قسمت تقسیم عبارت $x^2 + 8x + 2$ بر $x^2 - kx - m$ است. مقدار $m + n + k$ را بیابید.

۶. اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ آن‌گاه مقدار $A = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ را بیابید.

۷. مختصات سه رأس مثلثی به صورت $A(-1, 0)$ ، $B(2, -4)$ ، $C(3, 1)$

۸. m را طوری به دست آورید که $12m + 2$ و $m - 8$ سه جمله‌ای متوالی از یک تصاعد هندسی باشند.

۹. درستی اتحادهای زیر را اثبات کنید:

$$\text{الف) } \frac{\operatorname{tg} 17^\circ \operatorname{tg} 10^\circ - \sin 29^\circ \cos 20^\circ}{\sin 16^\circ \sin 7^\circ} = \operatorname{tg} 2^\circ$$

$$\text{ب) } \cos 2\alpha(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha) = 1$$

$$\text{ج) } \frac{2 \sin \alpha \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cos 2\alpha - 1$$

۱۰. معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید:

$$\sin 2x + \sin^2 x = \cos^2 x$$

۱۱. نقاط $A(1, -1)$ ، $B(3, 3)$ و $C(-3, 1)$ مفروض‌اند. مختصات بردارهای

$\vec{a} = \vec{AB}$ ، $\vec{b} = \vec{AC}$ و $\vec{c} = \vec{BC}$ را به دست آورید و سپس بردارهای $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ و $\vec{a} \cdot \vec{c}$ ، $\vec{c}(\vec{2a} - \vec{b})$ را برحسب بردارهای واحد نمایش دهید. هم‌چنین زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۱۲. با حروف کلمه‌ی «آهستگی»، چند کلمه‌ی چهارحرفی می‌توان نوشت؟ چندتا از این کلمات با حرف «ت» شروع می‌شوند؟ چندتا از آن‌ها بدون نقطه هستند؟

۱۳. سه دانش‌آموز سال اول، چهار دانش‌آموز سال دوم و پنج دانش‌آموز سال سوم، به اردوی آموزشی رفته‌اند.

الف) اگر بخواهیم از بین آن‌ها یک تیم فوتبال شش نفره تشکیل دهیم، به طوری که از هر پایه به تعداد مساوی در تیم عضویت داشته باشند، این کار به چند طریق مقدور است؟

ب) اگر از این جمع به تصادف یک گروه چهارنفره انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد که دو تا از آن‌ها کلاس اول و دو تا کلاس سوم باشند؟ چه قدر احتمال دارد که هیچ دانش‌آموز سال سومی در تیم نباشد؟

ریاضیات ۲

هوشنگ شرقی



۱. دامنه‌ی تعریف هریک از معادله‌های زیر را تعیین و معادله را حل کنید.

$$\text{الف) } \frac{2x}{x-1} + \frac{x+1}{x-2} = \frac{3x+2}{x}$$

$$\text{ب) } \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+1}$$

۲. اولاً نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ x - 2 & x < 0 \end{cases}$ و $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را

رسم کنید و از روی آن، یک به یک و پوشایی f را تحقیق کنید. ثانیاً مقدار $f(f(\frac{1}{2}))$ را به دست آورید.

۳. اولاً مقدار k را طوری به دست آورید که دستگاه معادلات $\begin{cases} kx + (k+2)y = k+4 \\ (k+1)k + 3ky = 4k+1 \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد. ثانیاً به ازای $k=1$ ، دستگاه معادلات فوق را به روش ماتریس وارون حل کنید.

۴. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{|x|}{[x]} - x$ را به ازای $-2 \leq x < 2$ رسم کنید.

۵. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید:

$$2 \log 2 + \log(x^2 - 1) - \log(4x - 1) = 0$$

۶. دنباله‌ی $a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 - n + 1}$ مفروض است. اولاً چندمین جمله از این دنباله

مساوی $\frac{7}{3}$ است. ثانیاً آیا جمله‌ای از این دنباله مساوی ۲ است؟

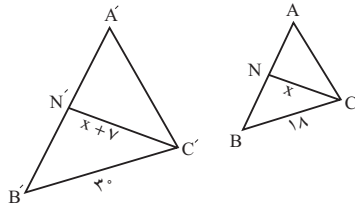
۷. تصاعد حسابی را مشخص کنید که مجموع هشت جمله‌ی نخست آن، نصف مجموع هشت جمله‌ی بعدی آن باشد و دوبرابر جمله‌ی چهارم آن، ۷ واحد از جمله‌ی هشتم آن بیشتر باشد.

هندسه ۱

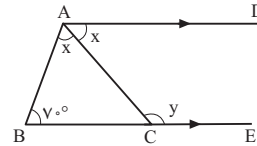
محمد هاشم رستمی



مثلت هستند. اندازه‌ی این دو میانه را تعیین کنید.

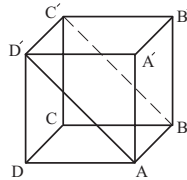


۱. اندازه‌ی x و y را در شکل داده شده تعیین کنید. (پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند.)

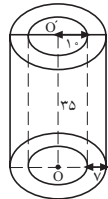


۸. مکعب مستطیلی به قطر $\sqrt{138}$ داده شده است که اندازه‌ی طول و عرض قاعده‌اش ۵ و ۷ است. درباره‌ی این مکعب مستطیل حساب کنید: الف) اندازه‌ی ارتفاع را. ب) اندازه‌ی مساحت جانبی، مساحت کل و حجم را.

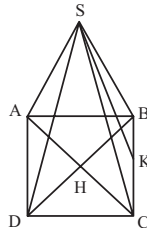
۹. در مکعب داده شده، اندازه‌ی مساحت ABCD مساوی $36\sqrt{2}$ است. اندازه‌ی حجم آن را تعیین کنید



۱۰. قاعده‌های دو استوانه‌ی شکل روبه‌رو، بر هم منطبق و مرکزهای دو قاعده نیز بر هم منطبق هستند. با توجه به شکل، اندازه‌ی حجم فضای بین این دو استوانه را تعیین کنید.



۱۱. در هرم مربع القاعدی منتظم SABCD، اندازه‌ی ارتفاع هرم مساوی ۲۴ سانتی‌متر و اندازه‌ی سهم هرم مساوی ۲۶ سانتی‌متر است. اندازه‌ی حجم آن را تعیین کنید.



۱۲. سطح کره‌ای به شعاع R با سطح کل مخروط قائمی به شعاع قاعده‌ی $\frac{R}{\sqrt{2}}$ مساوی است. اندازه‌ی ارتفاع مخروط را تعیین کنید.



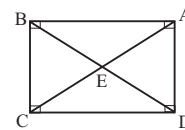
a و b را بیابید.

۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \tan^4 x + \cot^2 x$ مفروض است. $f'(\frac{\pi}{4})$ را بیابید.

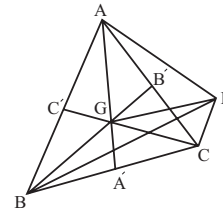
۴. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + mx + 1}$ ، حدود m را چنان بیابید که نمودار تابع سه مجانب داشته باشد.

۲. چهارضلعی ABCD مستطیل و E نقطه‌ی برخورد قطرهای آن است. نسبت x به y را در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید:

الف) $AC = 2x + y$ ، $BD = 16$ ، $AD = x - 2y$ ، $BC = 3$
ب) $AE = 2x$ ، $BE = y$ ، $ED = x + 10$

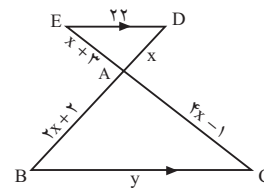


۳. اگر نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC را به نقطه‌ی P واقع در خارج این مثلث وصل کنیم، ثابت کنید یکی از سه مثلث PGA، PGB و PGC، معادل مجموع دو مثلث دیگر است.



۴. تفاضل اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه، مساوی ۳۱ است. اگر اندازه‌ی مساحت این مثلث ۱۸۰ واحد سطح باشد، اندازه‌ی ضلع‌های آن را تعیین کنید.

۵. واسطه‌ی هندسی بین دو مقدار $\sqrt{2a}$ و $\sqrt{18a^3}$ را تعیین کنید.
۶. اندازه‌ی x و y را با توجه به شکل داده شده تعیین کنید. پیکان‌های هم‌جهت، خط‌های موازی را نشان می‌دهند.



۷. دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه و CN و C'N' دو میانه‌ی متناظر از این دو

۱. مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x^2+11} - 3}$

۲. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{b \sin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - \cos \sqrt{x}}} & , x < 0 \\ a[x - 1] & , x > 0 \\ [x^2 - \sqrt{3}] & , x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته است.

حسابان ۱

مجتبی رفیعی



۵۵

دوره‌ی مفهومی / شماره‌ی ۳ بهار ۱۳۸۷

لرزش / دوره‌ی مفهومی

۵. نقطه‌ای روی محور y ‌ها بیابید که بتوان از آن، دو مماس عمود بر هم بر نمودار تابع با ضابطه $y = -x^2 + 2$ رسم کرد.
۶. معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ را در نقطه‌ای به طول ۸ واقع بر منحنی تابع بیابید.
۷. اگر خط به معادله $y = -2x + 1$ از نقاط اکستریم نسبی تابع با ضابطه‌ی
۵. مقدار m را بیابید.
۷. معادله‌ی $\cos 2x + 3 \cos x - 4 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.
۸. جدول تغییرات و نمودار دو تابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.
- (الف) $y_1 = -x^3 + 3x^2 - 1$
- (ب) $y_2 = \frac{2x-1}{2x+1}$

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

$$\begin{cases} R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x + \frac{1}{y}t^2 = z + \frac{1}{y}y^2 \end{cases}$$

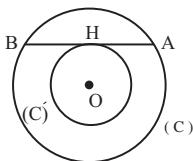
۹. یک تیم فوتبال در دو هفته‌ی متوالی دو مسابقه داده است. نتیجه‌ی هر مسابقه می‌تواند برای این تیم برد، باخت یا مساوی شود.
- (الف) فضای نمونه‌ی این پدیده‌ی تصادفی را بنویسید.
- (ب) پیشامد A را که در آن این تیم، لااقل یک برد داشته است، بنویسید.
- (ج) پیشامد B را که در آن این تیم، فقط یک باخت داشته است، بنویسید.
- (د) پیشامدهای $A \cap B$ و $A' - B$ را مشخص کنید.
۱۰. می‌خواهیم از بین ۵ مرد و ۴ زن، یک کمیته‌ی چهارنفره تشکیل دهیم. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که: (الف) تعداد مردها در کمیته بیشتر باشد. (ب) تعداد زن‌ها در کمیته بیشتر باشد.

۱۱. در یک مسابقه‌ی دو، شانس برد A ، دوبرابر شانس برد B و نصف شانس برد C و شانس برد B ، سه‌برابر شانس برد D است. شانس برد D و احتمال برد B یا C را به‌دست آورید.

۱۲. دو دوست بین ساعت ۸ تا ۸:۲۰ در جایی قرار ملاقات دارند. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که هیچ یک بیشتر از ۵ دقیقه معطل نشود.

۱۳. یک عدد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰۱، به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که این عدد مضرب ۳ یا ۵ باشد، ولی مضرب ۷ نباشد.

۱۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ی S باشند، ثابت کنید:
- $$P(A' - B) = P(A') + P(B') - P(A \cap B)'$$



- طول ۲۴ سانتی متر، بر دایره‌ی « C' » مماس است. اگر نسبت شعاع‌های این دو دایره مساوی $\frac{1}{3}$ باشد، اندازه‌ی این دو شعاع را تعیین کنید.

هندسه‌ی ۲

محمدهاشم رستمی

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$3^n - 3n + 5 = 3r$$

۲. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:
- $$1 + x^2 + y^2 \geq 2(x + 2y - 2)$$

۳. می‌دانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ نیز عددی گنگ است.

۴. از جعبه‌ای که در آن سی جفت کفش بچه‌گانه در چهاررنگ متفاوت وجود دارد، لااقل چند جفت باید خارج کنیم تا مطمئن شویم که سه جفت آن‌ها هم‌رنگ هستند؟

۵. ثابت کنید هرگاه x و y دو عدد گویای غیرصفر باشند، حاصل تقسیم آن‌ها نیز عددی گویاست.

۶. با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:
- $$(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$$

۷. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$ باشد، مجموعه‌ی $A \times B - A^2$ را با اعضای خود نمایش دهید و نمودار هندسی آن را رسم کنید.

۸. رابطه‌ی زیر در مجموعه‌ی $\mathbb{R}^2$ مفروض است. اولاً، نشان دهید این رابطه هم‌ارزی است. ثانیاً، کلاس هم‌ارزی $[(-2, 1)]$ را مشخص کنید.

۱. در مثلث ABC ، $\hat{A} = 65^\circ$ و $\hat{B} = 40^\circ$ است. ترتیب اندازه‌های سه ضلع این مثلث را مشخص کنید.
۲. ثابت کنید در هر مثلث، بزرگ‌ترین ضلع، از ثلث محیط مثلث بزرگ‌تر است و کوچک‌ترین ضلع، از ثلث محیط کوچک‌تر است.
۳. از مثلث ABC ، اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \beta$ و محیط مثلث $AB + BC + AC = 2P$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.
۴. دو دایره‌ی هم‌مرکز « C » و « C' » داده شده‌اند. وتر AB ، از دایره‌ی « C » به