با راهیان المپیادهای
مجموع ها و

● غلامرضا یاسی پور

این بخش در مورد «مجموع ها و حاصل ضرب های ادغامی»[۱] در مثلثات است. مسائل مربوط به «اصل ادغامی در جبر»، موضوع یکی از بخش های بعدی است.

در مسائل شامل مجموع ها، شیوه‌ی کار، استفاده از اتحادهای مثلثاتی برای نوشتن مجموع به صورت

$$\sum_{k=1}^{n}\left[F(k+1)-F(k)\right]$$

و سپس حذف جمله ها برای به‌دست آوردن $F(n+1)-F(1)$ است. به‌طور مشابه، برای حاصل ضرب ها:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{F(k+1)}{F(k)}=\frac{F(n+1)}{F(1)}$$

در این مورد، یکی از مثال ها، محاسبه‌ی $\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ است. با فرض $x \neq 2m\pi$ و صحیح بودن m، آن را در $2\sin x/2$ ضرب می‌کنیم. از فرمول ضرب به جمع حاصل ضرب یک سینوس و یک کسینوس، به‌دست می‌آوریم:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sum_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x)$$

$$=\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{1}{2}x$$

ریاضی (۹)

حاصل ضرب‌های ادغامی در مثلثات

به این ترتیب، مجموع اولیه عبارت است از:

$$(\sin(n+\frac{1}{2})x)/(2\sin(x/2))-\frac{1}{2}$$

البته زمانی که $x=2m\pi$ ، m صحیح، پاسخ n است.

برای مثال دوم، از فرمول مربوط به تابع تانژانت استفاده می‌کنیم.

مجموع:

$$\sum_{k=0}^{n} tg^{-1}\frac{1}{k^2+k+1}$$

را محاسبه کنید که در آن، tg^{-1} به جای تابع arctg قرار دارد.

در حل این مثال، از فرمول تفریق مربوط به تانژانت، یعنی

$$tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\,tgb}$$

استفاده می‌کنیم که فرمول مربوط به arctg، یعنی فرمول:

$$tg^{-1}u-tg^{-1}v=tg^{-1}\frac{u-v}{1+uv}$$

را به دست می‌دهد.

برای سادگی کار، قرار می‌دهیم $a_k=tg^{-1}x$. در این صورت:

$$\frac{1}{k^2+k+1}=\frac{k+1-k}{1+k(k+1)}=tg(a_{k+1}-a_k)$$

درنتیجه، مجموع مورد محاسبه برابر است با:

$$\sum_{k=0}^{n} tg^{-1}(tg(a_{k+1}-a_k))=\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_0$$
$$=tg^{-1}(n+1)$$

در حل مسائل زیر، از شیوه‌های مشابهی می‌توان استفاده کرد.

۱. ثابت کنید:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\dots+\frac{\sin nx}{\cos^n x}=\cot g\,x-\frac{\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$$

به ازای هر $x\neq k\frac{\pi}{2}$ ، k صحیح، برقرار است.

۲. ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ\cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ\cos 2^\circ}+\dots+\frac{1}{\cos 88^\circ\cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$

۳. فرض می‌کنیم n عددی صحیح و مثبت و a عددی حقیقی و چنان باشد که a/π عددی گنگ یا اصم است. مجموع زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{\cos a-\cos 3a}+\frac{1}{\cos a-\cos 5a}+\dots+\frac{1}{\cos a-\cos(2n+1)a}$$

۴. اتحاد زیر را اثبات کنید.

$$\sum_{k=1}^{n} tg^{-1}\frac{1}{2k^2}=tg^{-1}\frac{n}{n+1}$$

۵. مجموع زیر را که در آن $a\neq k\pi$ ، k صحیح است، محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}tg\frac{a}{2^n}$$

۶. ثابت کنید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n}=\frac{1}{4}(a-\sin a)$$

۷. ثابت کنید میانگین اعداد $n\sin n^\circ$ ، $n=2,4,6,\dots,180$ برابر $\cot g1^\circ$ است.

۸. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت n و هر عدد حقیقی

($x \neq \frac{k\pi}{2^m}$ ، $m=0,1,\dots,n$ ، k صحیح)،

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\dots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot g\, x-\cot g\, 2^n x$$

۹. محاسبه کنید.

$$\frac{tg1}{\cos 2}+\frac{tg2}{\cos 4}+\dots+\frac{tg2^n}{\cos 2^{n+1}}$$

۱۰. ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی ناصفر x، داریم:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$$

۱۱. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح $n>1$:

$$\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}=\frac{1}{2^n}$$

۱۲. حاصل ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-tg^2\frac{2^k\pi}{2^n+1}\right)$$

۱۳. فرض می‌کنیم n عددی صحیح و مثبت، و x عددی حقیقی متفاوت از $2^{k+1}(\frac{\pi}{3}+l\pi)$ ، $k=1,2,\dots,n$ ، و l صحیح باشد. حاصل ضرب زیر را محاسبه کنید.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-2\cos\frac{x}{2^k}\right)$$

۱۴. ثابت کنید.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2\pi.3^k}{3^n+1}\right)=1$$

پاسخ‌های مجموع‌ها و حاصل‌ضرب‌های ادغامی در مثلثات

۱. فرمول مجموع کسینوس‌ها مستلزم این است که:

$$\sin kx\ \sin x=\cos kx\ \cos x-\cos(k+1)x$$

که در آن k عدد صحیح و مثبت دل‌خواهی است. با تقسیم دو طرف این برابری به $\sin x\cos^k x$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin kx}{\cos^k x}=\frac{\cos kx}{\sin x\cos^{k-1}x}-\frac{\cos(k+1)x}{\sin x\cos^k x}$$

داریم:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}+\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}+\dots+\frac{\sin nx}{\cos^n x}$$

$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}+\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}-\frac{\cos 3x}{\sin x\cos^2 x}$$

$$+\dots+\frac{\cos nx}{\sin x\cos^{n-1}x}-\frac{\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$$

$$=\cot g\, x-\frac{\cos(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$$

و اتحاد ثابت می‌شود.

(Ionescu-Tiu, C. , Vidrascu, M., Exercitii si probleme de trigonometrie (Exercises and problems in trigonometry), Ed. Didactică si Pedagogică, Bucharest, 1969)

۲. با ضرب رابطه در $\sin 1^\circ$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\cos 0^\circ\cos 1^\circ}+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ\cos 2^\circ}+\dots+\frac{\sin 1^\circ}{\cos 88^\circ\cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\sin(1^\circ-0^\circ)}{\cos 1^\circ\cos 0^\circ}+\frac{\sin(2^\circ-1^\circ)}{\cos 2^\circ\cos 1^\circ}+\dots+\frac{\sin(89^\circ-88^\circ)}{\cos 89^\circ\cos 88^\circ}=\cot g 1^\circ$$

از اتحاد

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}=tga-tgb$$

نتیجه می‌گیریم که سمت چپ آن برابر است با

$$\sum_{k=1}^{89}\left[tgk^\circ-tg(k-1)^\circ\right]=tg89^\circ-tg0^\circ=\cot g 1^\circ$$

و اتحاد به اثبات می‌رسد.

(USAMO, 1992)

۳. مجموع را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos a-\cos(2k+1)a}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin ka\sin(k+1)a}$$

مانند مسئله‌ی قبل، مجموع، پس از ضرب در sina، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\big((k+1)a-ka\big)}{\sin ka\sin(k+1)a}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\cot gka-\cot g(k+1)a)$$

$$=\frac{1}{2}(\cot ga-\cot g(n+1)a)$$

بنابراین، پاسخ مسئله عبارت است از:

$$(\cot ga-\cot g(n+1)a)\ /\ (2\sin a)$$

۴. داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}tg^{-1}\frac{1}{2k^2}=\sum_{k=1}^{n}tg^{-1}\frac{(2k+1)-(2k-1)}{1+(2k-1)(2k+1)}$$

با استفاده از فرمول تفریق arctg (مقدمه را ملاحظه کنید)، مجموع اخیر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}(tg^{-1}(2k+1) - tg^{-1}(2k-1))$$

که برابر است با:

$$tg^{-1}(2n+1) - tg^{-1}(1) = tg^{-1}\frac{(2n+1)-1}{1+(2n+1)} = tg^{-1}\frac{n}{n+1}$$

۵. توجه داشته باشید که:

$$tgx = \frac{1}{tgx} - \frac{1-tg^2x}{tgx} = \frac{1}{tgx} - 2\frac{1}{tg2x} = \cot gx - 2\cot g2x$$

که مستلزم این است که:

$$\frac{1}{2^n}tg\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\cot g\frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\cot g\frac{a}{2^{n-1}}$$

این مجموع ادغام می‌شود و پاسخ زیر را به‌دست می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cot g\frac{a}{2^n} - \cot ga$$

حد اخیر برابر $1/a$ است، زیرا:

$$\lim_{x\to 0} x\cot gax = \lim_{x\to 0}\cos ax\frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a}$$

بنابراین، پاسخ مسئله برابر $1/a - \cot ga$ است.

(T. Andreescu)

۶. با استفاده از اتحاد $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$3^{n-1}\sin^3\frac{a}{3^n} = \frac{1}{4}(3^n\sin\frac{a}{3^n} - 3^{n-1}\sin\frac{a}{3^{n-1}})$$

درنتیجه، این مجموع ادغام می‌شود و برابر است با:

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} - \frac{1}{4}\sin a$$

با استفاده از این موضوع که:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x} = a$$

نتیجه می‌گیریم، مقدار مجموع برابر است با $(a-\sin a)/4$.

۷. مجموع زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{k=1}^{90} k\sin(2k)^\circ\sin 1^\circ$$

با تبدیل حاصل ضرب‌ها به مجموع داریم:

$$\sum_{k=1}^{90} k\cos(2k-1)^\circ - k\cos(2k+1)^\circ$$

$$= \sum_{k=1}^{90}(k-(k-1))\cos(2k-1)^\circ - 90\cos 181^\circ$$

$$= \sum_{k=1}^{90}\cos(2k-1)^\circ - 90\cos 1^\circ$$

از آن‌جا که

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$$

جملات مجموع اخیر، دوبه‌دو حذف می‌شوند. در نتیجه عبارت محاسبه‌شده برابر $90\cos 1^\circ$ است. با تقسیم بر $\sin 1^\circ$ و گرفتن میانگین، $\cos 1^\circ$ را به‌دست می‌آوریم.

راه‌حل دیگری نیز با استفاده از اعداد مختلط، امکان‌پذیر است. در این مورد $\sin n^\circ$ را به‌صورت:

$$(e^{i\pi n/180} - e^{-i\pi n/180})/(2i)$$

بیان و از این موضوع استفاده می‌کنیم که:

$$x+2x^2+\dots+nx^n = \frac{nx^{n+1}}{x-1} - \frac{x^{n+1}-x}{(x-1)^2}$$

این فرمول را می‌توان با استقرا یا مشتق گرفتن از

$$1+x+x^2+\dots+x^n = (x^{n+1}-1)/(x-1)$$

به اثبات رساند [USAMO, 1996 با طرح از: T.Andreescu].

۸. داریم:

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} - \frac{2\cos^2 x-1}{\sin 2x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot gx - \cot g2x$$

این رابطه نشان می‌دهد که سمت چپ ادغام می‌شود و اتحاد به‌دست می‌آید [هشتمین المپیاد ریاضی، ۱۹۶۶].

۹. داریم:

$$\frac{tga}{\cos 2a} = \frac{tga(1+tg^2a)}{1-tg^2a} = \frac{2tg-tga(1-tg^2a)}{1-tg^2a}$$

$$= \frac{2tga}{1-tg^2a} - tga = tg2a - tga$$

بنابراین، مجموع مسئله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$tg2 - tg1 + tg4 - tg2 + \dots + tg2^{n+1} - tg2^n = tg2^{n+1} - tg1$$

۱۰. از فرمول دو برابر زاویه‌ی سینوس حاصل می‌کنیم:

$\cos u = \sin 2u / (2\sin u)$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{\sin x}{x}\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{\sin x}{x}$$

این حد، به ازای $x=\pi$، توسط **ارشمیدس** برای یافتن مقدار تقریبی به‌کار رفته است. در واقع، آن‌چه که ارشمیدس انجام داد، محاسبه‌ی تقریبی طول دایره با استفاده از پیرامون چندضلعی منتظم با 2^k ضلع محاطی بود و محاسبه‌اش به فرمول فوق تبدیل می‌شود.

۱۱. در صورتی که سمت چپ را در $\sin((2\pi)/(2^n-1))$ ضرب کنیم و متوالیاً از فرمول دو برابر زاویه‌ی سینوس استفاده به‌عمل آوریم حاصل می‌کنیم:

$$2^n\sin\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}$$

$$=2^{n-1}\sin\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cdots\cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}=\cdots$$

$$=\sin\frac{2^{n+1}\pi}{2^n-1}=\sin(2\pi+\frac{2\pi}{2^n-1})=\sin\frac{2\pi}{2^n-1}$$

از آن‌جا که حاصل‌ضرب مورد محاسبه از این رابطه، با تقسیم بر $\sin((2\pi)/(2^n-1))$ به‌دست می‌آید، نتیجه حاصل می‌شود:

(Romanian high school text book)

۱۲. اتحاد $1-\operatorname{tg}^2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x}$ رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$1-\operatorname{tg}^2\frac{2^k\pi}{2^n+1}=2\,\frac{\operatorname{tg}\frac{2^k\pi}{2^n+1}}{\operatorname{tg}\frac{2^{k+1}\pi}{2^n+1}}$$

و نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب مورد بحث به مورد ذیل ادغام می‌شود:

$$2^n\,\frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2^n+1}}{\operatorname{tg}\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1}}=2^n\,\frac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2^n+1}}{\operatorname{tg}(2\pi-\frac{2\pi}{2^n+1})}=-2^n$$

(T.Andreescu)

۱۳. می‌توان نوشت:

$$1-2\cos a=\frac{1-4\cos^2 a}{1+2\cos a}=\frac{1-2(1+\cos 2a)}{1+2\cos a}$$

$$=-\frac{1+2\cos 2a}{1+2\cos a}$$

نتیجه می‌گیریم که حاصل‌ضرب مسئله به‌صورت زیر ادغام می‌شود:

$$(-1)^n\,\frac{1+2\cos x}{1+2\cos\frac{x}{2^n}}$$

و اتحاد به اثبات می‌رسد.

۱۴. داریم:

$$1+2\cos 2a_k=1+2(1-2\sin^2 a_k)=3-4\sin^2 a_k$$

$$=\frac{\sin 3a_k}{\sin a_k}$$

که در آن

$$a_k=\frac{3^k\pi}{3^n+1}$$

درنتیجه، حاصل‌ضرب به مورد زیر ادغام می‌شود:

$$\frac{\sin 3a_n}{\sin a_1}=\frac{\sin\frac{3^{n+1}\pi}{3^n+1}}{\sin\frac{3\pi}{3^n+1}}$$

صورت کسر اخیر برابر است با:

$$\sin(3\pi-\frac{3\pi}{3^n+1})=\sin\frac{3\pi}{3^n+1}$$

و درنتیجه، برابر مخرج همین کسر است. به این ترتیب، راه‌حل مسئله کامل می‌شود.

(T. Andreescu)

زیرنویس

1. telescopic