

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به درک شهودی، استدلال‌های استقرایی و قیاسی و محدودیت‌های آن‌ها، استدلال استنتاجی و مثال نقض صحبت کردیم. اینک در ادامه‌ی آن، استدلال‌های دیگر ریاضی را مطرح می‌کنیم.

استدلال ریاضی‌های

(قسمت ۳)

• میرشهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com

برای دانش‌آموزان سال سوم

برای اثبات این مطلب، باید با توجه به درستی فرض، به درستی حکم رسید.

$$x > 2 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow 2x - 3 > 4 - 3 \Rightarrow 2x - 3 > 1$$

مثال: ثابت کنید اگر $x > 1$ ، آن‌گاه $4 - x^2 < 3$.

حل:

فرض: $x > 1$

حکم: $4 - x^2 < 3$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 4 - x^2 < 4 - 1 \Rightarrow 4 - x^2 < 3$$

اگر در مثال قبل، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ی

قضیه‌ی شرطی

هر قضیه که به صورت ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ (اگر p آن‌گاه q) باشد و با توجه به درستی p بتوان درستی q را نتیجه گرفت، قضیه‌ای شرطی است. در قضیه‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را فرض و q را حکم قضیه می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر $x > 2$ ، آن‌گاه $2x - 3 > 1$.

حل:

فرض: $x > 2$

حکم: $2x - 3 > 1$

$$-4x - 18 < 2$$

۲. دو زاویه‌ی مجاور به قاعده‌ی یک مثلث با هم برابرند، اگر و تنها اگر مثلث متساوی الساقین باشد.

اثبات بازگشتی

گاهی اوقات برای اثبات بعضی از مسئله‌ها، باید از یک فرض یا یک رابطه‌ی کاملاً بدیهی شروع کنیم. اما در برخورد اول با مسئله، ممکن است این رابطه‌ی بدیهی به ذهنمان نیاید. بنابراین با استفاده از درستی حکم و انجام اعمال ریاضی روی آن، سعی می‌کنیم به یک رابطه‌ی بدیهی برسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات، باید نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت پذیر هستند. در غیر این صورت، درستی اثبات تأیید نمی‌شود.

مثال: با استفاده از اثبات بازگشتی، حکم‌های زیر را ثابت کنید:
(الف) برای دو عدد حقیقی a و b ، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a$$

(ب) برای عددهای حقیقی x ، y و z ثابت کنید:

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 3z$$

(ج) برای عددهای حقیقی x ، y و z ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

(د) برای عددهای حقیقی و مثبت a و b ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq ab(a + b)$$

حل:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + b + a \quad (\text{الف})$$

دو طرف را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2b + 2a$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + 1 + 1 - 2ab - 2b - 2a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2b + 1) + (a^2 - 2a + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، بنابراین آن را یک فرض بدیهی در نظر می‌گیریم و با بازگشت مراحل انجام شده، می‌توانیم به درستی حکم برسیم.

$$4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 \geq 4x - 2y + 3z \quad (\text{ب})$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 9z^2 + 27 - 4x + 2y - 3z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (9z^2 - 3z + 25) \geq 0$$

شرطی «اگر $4 - x^2 < 3$ آن گاه $x > 1$ » به دست می‌آید. اکنون اگر با فرض درستی $4 - x^2 < 3$ بتوان به درستی $x > 1$ رسید، در این صورت، عکس قضیه‌ی شرطی، یک قضیه‌ی شرطی است. در غیر این صورت، عکس قضیه‌ی شرطی، یک قضیه‌ی شرطی نیست.

$$4 - x^2 < 3 \Rightarrow 4 - x^2 - 4 < 3 - 4 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، با فرض درستی $4 - x^2 < 3$ ، به $(x < -1)$ یا $(x > 1)$ رسیدیم و نتوانستیم فقط درستی $(x > 1)$ را ثابت کنیم. در نتیجه، عکس این قضیه‌ی شرطی برقرار نیست.

عکس قضیه‌ی شرطی

هرگاه $p \Rightarrow q$ یک قضیه‌ی شرطی باشد، چنان‌چه در این قضیه جای فرض و حکم را با هم عوض کنیم، گزاره‌ی $q \Rightarrow p$ به دست می‌آید. حال در صورتی که $q \Rightarrow p$ یک قضیه‌ی شرطی باشد، به آن قضیه‌ی شرطی عکس $p \Rightarrow q$ می‌گوییم.

مثال: قضیه‌ی «اگر $x > -5$ ، آن گاه $-4x - 18 < 2$ » را در نظر بگیرید. آیا عکس آن، یک قضیه‌ی شرطی است؟

حل: ابتدا عکس قضیه‌ی شرطی را می‌نویسیم:

$$\text{«اگر } -4x - 18 < 2 \text{ آن گاه } x > -5\text{»}$$

$$-4x - 18 < 2 \Rightarrow -4x - 18 + 18 < 2 + 18$$

$$\Rightarrow -4x < 20 \Rightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{20}{-4} \Rightarrow x > -5$$

در نتیجه، عکس این قضیه‌ی شرطی برقرار است.

قضیه‌ی دوشروطی

اگر $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هر دو قضیه‌ی شرطی باشند، در این صورت می‌گوییم p با q یک قضیه‌ی دوشروطی را تشکیل می‌دهند و می‌نویسیم $p \Leftrightarrow q$ و می‌خوانیم: « p شرط لازم و کافی برای q است» یا «شرط لازم و کافی برای p آن است که q » یا « p اگر و تنها اگر q ».

مثال: در این جا، دو قضیه‌ی دوشروطی آمده است:

۱. شرط لازم و کافی برای این که $x > -5$ آن است که

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (y+1)^2 + (3z-5)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \quad \text{ج)}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با بازگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

د)

$$a^2 + b^2 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - ab \geq ab \quad (a+b > 0 \text{ چون})$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، پس با برگشت روابط، می توان به درستی حکم رسید.

برهان خلف

برای اثبات درستی یک حکم با روش برهان خلف، ثابت می کنیم که خلاف حکم نادرست است. برای این منظور، مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

۱. فرض می کنیم که حکم مسئله درست نباشد (فرض خلف).
۲. نشان می دهیم که فرض خلف نتیجه ای به دست می دهد که خلاف فرض مسئله یا خلاف یکی از اصول یا قضیه هایی است که قبلاً پذیرفته ایم.

۳. در این مرحله به تناقض می رسیم. بنابراین فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

مثال: نشان دهید با فرض صحیح بودن n ، اگر n^3 مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

حل: برهان خلف

فرض می کنیم n مضرب ۳ نباشد (فرض خلف)، یعنی $n \neq 3k$ که $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین داریم:

$$n = 3k+1 \text{ یا } n = 3k+2; (k \in \mathbb{Z})$$

در حالتی که $n = 3k+1$ ، خواهیم داشت:

$$n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$$

$$= 3 \underbrace{(9k^3 + 9k^2 + 3k)}_{k' \in \mathbb{Z}} + 1 = 3k' + 1$$

در این حالت ملاحظه می کنیم که n^3 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

در حالتی که $n = 3k+2$ ، خواهیم داشت:

$$n^3 = (3k+2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 8$$

$$= 3 \underbrace{(9k^3 + 18k^2 + 12k + 2)}_{k'' \in \mathbb{Z}} + 2 = 3k'' + 2$$

در این حالت نیز ملاحظه می کنیم که n^3 مضرب ۳ نیست و این با فرض مسئله متناقض است.

در نتیجه، در هر دو حالت به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر n عددی صحیح و n^2 مضرب ۵ باشد، نشان دهید n نیز مضربی از ۵ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم n عدد صحیح و مضرب ۵ نباشد (فرض خلف)، بنابراین $n \neq 5k$ که $k \in \mathbb{Z}$ و داریم:

$$n = 5k+1 \text{ یا } n = 5k+2 \text{ یا } n = 5k+3 \text{ یا } n = 5k+4$$

یعنی $n = 5k+i$ ($k \in \mathbb{Z}$); $n = 5k+4$ $k \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$

اگر در هر یک از حالت های بالا مقدار n^2 را حساب کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که n^2 مضرب ۵ نیست و این با فرض مسئله تناقض دارد. در نتیجه، در هر حالت به تناقض می رسیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt[3]{3}$ گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم $\sqrt[3]{3}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس $\sqrt[3]{3}$ گویاست. یعنی:

$$\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1$$

حل مثال با برهان خلف

فرض کنیم $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ اول نباشد و عامل اول بزرگ‌تر از p نداشته باشد (فرض خلف). در این صورت عدد N که بزرگ‌تر از یک و طبیعی است، عامل اولی مانند p' دارد (نکته ۱). از طرف دیگر، عدد N عامل اول بزرگ‌تر از p ندارد. بنابراین $p' \in \{2, 3, 5, \dots, p\}$ و N بر p' بخش پذیر است (نکته ۲). یعنی: $N = p' \times q$ ($q \in \mathbb{Z}$) یا

$$(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 = p' \times q \quad (1)$$

چون $p' \in \{2, 3, 5, \dots, p\}$ ، بنابراین $(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p)$ بر p' بخش پذیر است. یعنی:

$$(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) = p' \times q' \quad (q' \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های ۱ و ۲ و نکته ۳ داریم:

$$\begin{aligned} (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 &= p' \times q \\ (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) &= p' \times q' \\ \frac{(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 - (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p)}{(2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1 - (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p)} &= \frac{p' \times q - p' \times q'}{p' \times (q - q')} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 = p' \times q_1$$

از رابطه‌ی اخیر می‌فهمیم که عدد ۱ بر عدد اول p' بخش پذیر است و این غیرممکن است (تناقض). پس فرض خلف، باطل و حکم مسئله برقرار است.

برهان مستقیم

در قضیه‌ای به صورت $p \Rightarrow q$ ، به برهانی که با استفاده از درستی p نشان می‌دهد که q درست است، برهان مستقیم می‌گوییم. استدلال استنتاجی و اثبات قضیه‌های شرطی، دو نوع از برهان‌های مستقیم‌اند.

برهان غیرمستقیم

به استدلال‌هایی مانند برهان خلف یا اثبات بازگشتی که در آن‌ها شیوه‌ی برهان مستقیم نیست، یعنی برهانی که حکم را به‌طور مستقیم از فرض نتیجه‌نگیریم، برهان غیرمستقیم می‌گوییم.

$$\sqrt[p]{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow (\sqrt[p]{3})^q = \left(\frac{p}{q}\right)^q \Rightarrow p^q = 3^q q^q$$

از برابری آخر نتیجه می‌گیریم که p^q مضرب ۳ است، پس p نیز مضرب ۳ است، یعنی $p = 3k$ که $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} p^q = 3^q q^q \\ p = 3k \end{cases} \Rightarrow (3k)^q = 3^q q^q \Rightarrow q^q = 9k^q = 3(\underbrace{3k^q}_{k' \in \mathbb{Z}}) = 3k'$$

از این برابری نتیجه می‌گیریم که q^q مضرب ۳ است، پس q مضرب ۳ است، یعنی $q = 3k_1$ که $k_1 \in \mathbb{Z}$. بنابراین p و q هر دو مضرب ۳ هستند و این با فرض $(p, q) = 1$ در تناقض است. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: ثابت کنید که $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گنگ است.

حل: برهان خلف

فرض کنیم که $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ گنگ نباشد (فرض خلف). پس

$\sqrt{3} - \sqrt{5}$ عددی گویاست، یعنی:

$$\sqrt{3} - \sqrt{5} = a, \quad a \in \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{3} = a + \sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = (a + \sqrt{5})^2 \Rightarrow 3 = a^2 + 5 + 2a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{-a^2 - 2}{2a} \in \mathbb{Q}$$

در نتیجه $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ و این با گنگ بودن عدد $\sqrt{5}$ متناقض است.

بنابراین به تناقض رسیدیم. پس فرض خلف، باطل و حکم برقرار است.

مثال: اگر ۲، ۳، ۵ و ... و تمام اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی p باشند، ثابت کنید که $N = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p) + 1$ یا اول است یا عامل اول بزرگ‌تر از p دارد.

قبل از حل این مثال لازم است که نکته‌های زیر را مطرح کنیم:

۱. هر عدد طبیعی $n > 1$ یک عامل اول دارد، یا به عبارت دیگر،

بر یک عدد اول بخش پذیر است.

۲. هرگاه a و $b \neq 0$ دو عدد صحیح باشند، به طوری که a بر b بخش پذیر باشد، در این صورت یک عدد صحیح مانند q یافت می‌شود؛ به گونه‌ای که $a = b \times q$.

۳. هرگاه دو عدد صحیح a و b بر عدد صحیح c بخش پذیر باشند، در این صورت $a \pm b$ بر c بخش پذیر است.