

مسائل و مباحثی پیرامون اعداد گویا و گنگ

$$\frac{1}{2} = 0.511265296117647\ldots$$

$$10^{\circ}x - x = 9/9999\ldots$$

• عنایت‌اله راستی‌زاده - دبیر ریاضی شیراز

اشاره

این مقاله در تکمیل بحث اعداد گویا و گنگ از کتاب ریاضیات سال اول متوسطه آمده است. با توجه به گستردگی و جالب بودن این بحث و سؤالات فراوان دانش‌آموزان علاقه‌مند، در این مقاله کوشش شده است، به طرح چند بحث دیگر همراه با حل تعدادی مسئله بپردازیم. لذا از ذکر تعریف‌ها و ویژگی‌های مقدماتی اعداد گویا و گنگ صرف نظر و بیشتر به مسائلی توجه کرده ایم که در کتاب درسی به وضوح به آن‌ها پرداخته نشده است.

۱. دستوری کلی برای یافتن هر تعداد عدد گویا بین دو عدد گویای مفروض

مجموعه‌ی اعداد گویا را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}; (m, n) = 1 \right\}$$

دو عدد گویای $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را در نظر می‌گیریم. با فرض $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

به راحتی دیده می‌شود که: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. از آن جا که

$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$ ، پس : $\frac{na}{nb} < \frac{c}{d}$ و در نتیجه : $\frac{a}{b} < \frac{na+c}{nb+d} < \frac{c}{d}$ که $n \in \mathbb{N}$

به کمک دستور فوق می توانیم هر تعداد عدد گویا که بخواهیم ، بین دو عدد گویای مفروض بیابیم . هم چنین درباره ی وضع نسبی این اعداد می توان ثابت کرد که :

$\frac{a}{b} < \frac{na+c}{nb+d} < \dots < \frac{3a+c}{3d+d} < \frac{2a+c}{2b+d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
به این منظور فرض کنیم : $n' < n''$. ثابت می کنیم :
 $\frac{n'a+c}{n'b+d} < \frac{n''a+c}{n''b+d}$ که با توجه به مثبت بودن مخارج ها خواهیم داشت :

$$n''n'ab + n''ab + n'bc + cd < n''n'ab + n''bc + n'ab + cd \\ \Leftrightarrow (n'' - n')ad < (n'' - n)bc \Leftrightarrow ac < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

۲. نوشتن عدد اعشاری دوره ای نامتناهی به صورت متعارفی

نشان دهید که هر عدد اعشاری دوره ای نامتناهی را می توان به صورت متعارفی نوشت .

حل : هر عدد اعشاری متناوب را می توانیم به این صورت بنویسیم :

$$x = 0/a_1a_2\dots a_s\overline{b_1b_2\dots b_t}$$

که در آن : $a_1, a_2, \dots, a_s$ ، تعداد s رقم متوالی در قسمت غیر تکراری ، و $b_1, b_2, \dots, b_t$ ، تعداد t رقم در قسمت تکراری را نشان می دهند . اگر ابتدا x را در 10^s و سپس در 10^{s+t} ضرب کنیم و بعد عمل تفریق را انجام دهیم ، به دست می آوریم :

$$10^s \times x = a_1a_2\dots a_s + 0/\overline{b_1b_2\dots b_t}$$

$$10^{s+t} \times x = a_1a_2\dots a_sb_1b_2\dots b_t + 0/\overline{b_1b_2\dots b_t}$$

و :

$$(10^{s+t} - 10^s)x = a_1a_2\dots a_sb_1b_2\dots b_t - a_1a_2\dots a_s$$

بنابراین :

$$x = \frac{a_1a_2\dots a_sb_1b_2\dots b_t - a_1a_2\dots a_s}{10^{s+t} - 10^s}$$

۳. عددهای گویای دارای دو نمایش اعشاری متفاوت

بین عددهای گویا مانند $\frac{a}{b}$ ، کدام یک دارای دو نمایش اعشاری اساساً متفاوت هستند؟

حل : پاسخ این است که : عددهای گویای $\frac{a}{b}$ (به ساده ترین

صورت) با این ویژگی که b بر هیچ عدد اول دیگری غیر از ۲ و ۵ بخش پذیر نباشد و $a \neq 0$. این حقیقت از آن جا ناشی می شود که بین اعداد اعشاری پایان دار ۱ و عدد اعشاری بی پایان $0.9999\dots$ ،

تساوی برقرار است . اگر هر دو طرف تساوی $0.3333\dots = \frac{1}{3}$ را

در ۳ ضرب کنیم ، نتیجه ی به ظاهر عجیب $0.9999\dots = 1$ را به دست می آوریم . از دید دیگری نیز می توان به تساوی اخیر رسید . فرض کنیم : $0.9999\dots = x$ ، پس : $0.9999\dots = 10x$. بنابراین :

$$10x - x = 9.9999\dots - 0.9999\dots$$

$$9x = 9 \quad x = 1$$

از این نتیجه می توان برای برگرداندن هر عدد اعشاری پایان دار به صورت بی پایان استفاده کرد . مثلاً :

$$0.21 = 0.209999\dots \quad 0.81 = 0.809999\dots \quad 0.42 = 0.419999\dots$$

تذکر این مطلب ضروری است که علاوه بر نوشتن مثلاً 0.43 به صورت $0.429999\dots$ ، می توانیم این عدد را به صورت های زیر نیز بنویسیم :

$$0.430000\dots, 0.43000\dots, 0.4300000\dots, 0.43000000\dots$$

با وجود این ، تفاوت این ها با خود 0.43 آن قدر جزئی است که ما آن ها را در ردیف نمایش های اساساً متفاوت نمی گذاریم . وقتی به صورت اعشاری و بی پایان عددی مانند 0.43 اشاره می کنیم ، مقصودمان $0.429999\dots$ است و نه $0.430000\dots$

گذری به تاریخ!

کارل فردریک گاوس ، کسرهای اعشاری متناوب را مورد مطالعه قرار داد . او علی رغم نبوغ سرشار برای جست و جویهای آزمایشی خود ، از سنگینی محاسبه ها و کار عظیم با عددها روی گردان نشد و مثلاً جدول کاملی از نمایش اعشاری هزار عدد گویای $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\dots$ و $\frac{1}{1000}$ را تشکیل داد . (بعضی از این اعداد دوره ی گردشی به طول چند صد رقم دارند!) و بالاخره نظریه ی نسبتاً کاملی در مورد کسرهای اعشاری متناوب ارائه داد .

۴. ویژگی جالب بعضی از اعداد اعشاری دوره ای

به بسط اعشاری کسرهای زیر توجه کنید :

$$\frac{1}{7} = 0.142857 \quad 1+4+2+8+5+7=27$$

$$\frac{1}{11} = 0.09 \quad 0+9=9$$

$$\frac{1}{271} = 0.00369 \quad 0+0+3+6+9=18$$

$$\frac{1}{37} = 0.027 \quad 0+2+7=9$$

همان طور که دیده می شود ، مجموع ارقام دوره ی تناوب در هر حالت بر ۹ بخش پذیر است . این مطلب اتفاقی نیست! ثابت می کنیم اگر n بر ۲ ، ۳ ، ۵ و ۹ بخش پذیر نباشد ، مجموع ارقام دوره ی تناوب

کسر $\frac{1}{n}$ بر ۹ بخش پذیر خواهد بود.
خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} = \frac{0}{a_1 a_2 \dots a_t} \\ \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{n} = a_1 a_2 \dots a_t + \frac{0}{a_1 a_2 \dots a_t} \\ \Rightarrow \frac{1 \cdot 10^t}{n} - \frac{1}{n} = a_1 a_2 \dots a_t \Rightarrow (10^t - 1) = n(a_1 a_2 \dots a_t)$$

اما $10^t - 1$ عددی مضرب ۹ است، پس: $n(a_1 a_2 \dots a_t) = 9k$. چون n بر ۳ بخش پذیر نیست، پس n بر ۹ بخش پذیر نخواهد بود و در نتیجه: $a_1 a_2 \dots a_t = 9k'$. اما عددی بر ۹ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۹ بخش پذیر باشد. لذا: $a_1 + a_2 + \dots + a_t$ یعنی مجموع ارقام دوره‌ی تناوب بر ۹ بخش پذیر است.

۵. یک ویژگی جالب دیگر بعضی از اعداد اعشاری دوره‌ای

این مطلب از کتاب «ابتکارهایی در ریاضیات»، تألیف راس هانسبرگر انتخاب شده است. اعداد گویایی با مخرج اول را بررسی می‌کنیم که طول دوره‌ی بسط‌های اعشاری آن‌ها زوج است. چند مثال از این گونه اعداد عبارت‌اند از:

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \\ \frac{1}{13} = 0.\overline{076923} \\ \frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647} \\ \frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$$

در اولین نگاه، دوره‌هایی که در سمت راست دیده می‌شوند، چندان جالب به نظر نمی‌رسند. ولی با نگاه دقیق‌تر معلوم می‌شود، همه از این ویژگی برخوردارند که مجموع هر دو رقم از آن‌ها که به اندازه‌ی نصف طول دوره از هم فاصله دارند، ۹ است. اگر در این مثال‌ها کوتاه‌ترین دوره‌ها را در نظر بگیریم و به دو قسمت تقسیم کنیم و این دو قسمت را، به صورت دو عدد معمولی، با هم جمع

$$\begin{array}{r} 0.76 + 0.42 = 1.18 \\ \frac{1}{17} \text{ داریم: } \frac{857}{999}, \frac{1}{13} \text{ داریم: } \frac{923}{999}, \frac{1}{17} \text{ در } \frac{1}{17} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.52631578 + 0.47368421 = 1.0 \\ \frac{1}{19} \text{ داریم: } \frac{94117647}{99999999}, \text{ و در } \frac{1}{19} \text{ داریم: } \frac{947368421}{999999999} \end{array}$$

آیا این مثال‌ها از الگویی کلی پیروی می‌کنند؟ جواب «مثبت» است. اگر بسط اعشاری عدد گویای $\frac{n}{p}$ که در آن p عدد اولی مخالف

۵۲ است، یک عدد اعشاری دوره‌ای، دارای کوتاه‌ترین دوره با تعداد زوجی از ارقام باشد، آن‌گاه همه‌ی رقم‌های مجموع دو نیمه‌ی آن دوره، که به صورت اعداد معمولی در نظر گرفته شوند، ۹ است. اثبات این مطلب از حوصله‌ی مقاله‌ی حاضر خارج است و علاقه‌مندان را به مرجع ذکر شده ارجاع می‌دهیم.

۶. کسرهای تحویل ناپذیر (ساده‌نشده)

ثابت کنید کسر $\frac{5n+2}{3n+1}$ به ازای همه‌ی مقادیر صحیح n ، یک کسر تحویل ناپذیر (ساده‌نشده) است.

حل: باید نشان دهیم بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک صورت و مخرج کسر برابر یک است، یعنی نشان دهیم:

$$(5n+2, 3n+1) = 1$$

یکی از روش‌های یافتن ب.م.م. روش نردبانی (روش تقسیمات متوالی) است. در این روش آخرین باقی‌مانده‌ی غیر صفر، همان ب.م.م. است.

$$\begin{array}{l} 5n+2 = (1)(3n+1) + (2n+1) \\ 3n+1 = (1)(2n+1) + (n) \\ 2n+1 = (2)(n) + 1 \\ n = n(1) + 0 \end{array}$$

لذا $5n+2$ و $3n+1$ نسبت به هم اول‌اند. روش دوم استفاده از این قضیه است که $(a, b) = 1$ اگر و تنها اگر عددهای صحیح s, t به گونه‌ای یافت شوند که $ra + sb = 1$. در این مسئله داریم:

$$3(5n+2) + (-5)(3n+1) = 1$$

۷. کسرهای اعشاری تحقیقی

ثابت کنید کسر $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ به ازای بی‌شمار عدد طبیعی a ، کسر اعشاری تحقیقی است.

حل: با توجه به اتحاد زیر داریم:

$$\begin{array}{l} a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \\ 8^k - 1 = (8-1)(8^{k-1} + 8^{k-2} + \dots + 1) \\ 8^k - 1 = 7t \end{array}$$

پس: یعنی: $7t+1 = 8^k$ یا $7t+1 = 2^{3k}$.

بنابراین، کسر $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ به ازای بی‌شمار عدد طبیعی a که تساوی $7a+1 = 2^{3k}$ برقرار شود، یک کسر اعشاری تحقیقی است (چون $k \in \mathbb{N}$ ، پس بی‌شمار a با این ویژگی می‌توان یافت).

گذری به تاریخ!

$\sqrt{2}$ گویا نیست. این واقعیت عملاً در حدود ۵۰۰ سال قبل از میلاد مسیح و احتمالاً توسط خود فیثاغورس اثبات شده است. در