



$$(3^{\frac{x}{2}})^2 - (2^{\frac{y}{2}})^2 = 77$$

از تقسیم دو طرف این معادله بر دو طرف معادله دوم، به معادله ای می‌رسیم که با معادله دوم، این دستگاه را تشکیل می‌دهند:

$$\begin{cases} \frac{x}{3^2} + \frac{y}{2^2} = 11 \\ \frac{x}{3^2} - \frac{y}{2^2} = 7 \end{cases}$$

$$\cdot y_2 = -\sqrt{2} \quad x_2 = 4, \quad y_1 = \sqrt{2}, \quad x_1 = 4$$

$$\cdot m \neq n \quad \begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases} \quad .18$$

حل: از معادله اول، x را به دست می‌آوریم:

$$x = y^{\frac{x}{y}}$$

که می‌توان آن را این طور نوشت:

$$x^m = y^{\frac{mx}{y}} \quad (1)$$

از مقایسه این معادله با معادله دوم دستگاه به دست می‌آید:

$$y^n = y^{\frac{mx}{y}}$$

از این جاتیجه می‌گیریم: $y = 1$ و یا $\frac{mx}{y} = n$ ؛ یعنی:

$$y = \frac{mx}{n} \quad (2)$$

برای $y = 1$ ، به دست می‌آید $x = 1$.

اگر مقدار y را از رابطه (2) در معادله دوم دستگاه قرار دهیم:

$$x^m = x^n \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

یا:

$$x^{m-n} = \left(\frac{m}{n}\right)^n$$

که از آن جا، مقدار x به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}, & |x_1 = 1 \\ y_1 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}} & \end{cases} \quad \text{پاسخ:}$$

$$\cdot x_{2,3} = 1^{\pm \sqrt{\frac{3}{2}}} \quad x_1 = 1 \quad \text{پاسخ:}$$

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} \quad .16$$

$$+ \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} = a$$

حل: داریم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x) + \frac{1}{4}(1 + \log_x a)}$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}(\log_x a - 1)} = a$$

روشن است که $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$ ؛ بنابراین:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x) + \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{\log_a x})}$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}(\frac{1}{\log_a x} - 1)} = a$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$\sqrt{\frac{(1 + \log_a x)^2}{4 \log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{4 \log_a x}} = a \quad (1)$$

در حالت که $\log_a x > 1$ باشد، $a > 1$ است و معادله (1)

چنین می‌شود:

$$\log_a x = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{a}}$$

در حالت $1 < \log_a x \leq 0$ ، $0 < a < 1$ و معادله (1) چنین می‌شود:

$$\frac{1 + \log_a x}{2 \sqrt{\log_a x}} - \frac{\log_a x - 1}{2 \sqrt{\log_a x}} = a$$

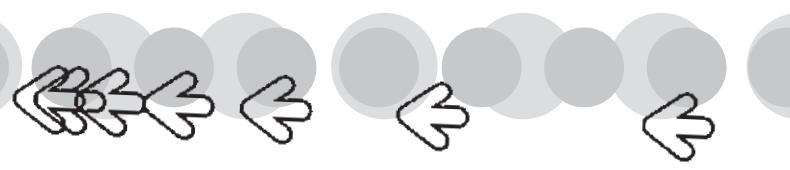
که از آن جا به دست می‌آید:

$$1 = a \sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}}$$

$$\cdot x_2 = a^{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} \quad x_1 = a^{\frac{1}{a}}$$

$$\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases} \quad .17$$

حل: معادله اول دستگاه را به این صورت می‌نویسیم:



$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی اول دایره باشد، $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ مثبت و بنابراین $\sin\alpha = |\sin\alpha|$ است. و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی دوم دایره باشد، $\sin\alpha$ منفی و بنابراین $\sin\alpha = -\sin\alpha$ است.

همچنین، برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی راست دایره باشد، $\cos\alpha$ مثبت و بنابراین $|\cos\alpha| = \cos\alpha$ ، و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی چپ دایره باشد، $\cos\alpha$ منفی و بنابراین $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ است. بنابراین داریم:

برای این‌که زاویه‌های B و C مثبت باشند، با فرض $C > B$ باید داشته باشیم:

$$\alpha < \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \quad \text{یا} \quad \cos\alpha > \sin\frac{A}{2}$$

بنابراین، شرط وجود جواب عبارت است از:

$$\sin\frac{A}{2} < 2m + \sin\frac{A}{2} \leq 1$$

از نابرابری سمت راست نتیجه می‌شود:

$$m \leq \frac{1}{2}(1 - \sin\frac{A}{2})$$

ب) از بحث بالا نتیجه می‌شود:

$$\sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{2}(1 - \sin\frac{A}{2})$$

دو طرف نابرابری را در ${}^{\circ}$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{2}(1 - \sin\frac{A}{2}) \sin\frac{A}{2}$$

$\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}(1 - \sin\frac{A}{2}) \sin\frac{A}{2}$ حاصل ضرب دو عامل مثبت به مجموع واحد است و حداکثر حاصل ضرب در حالت برابر آن‌ها به دست می‌آید؛ یعنی وقتی که $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ باشد. در نتیجه:

$$\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$$

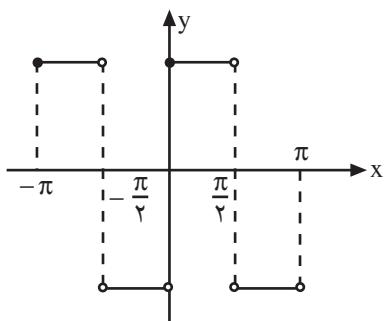
و این هم یک مسئله درباره محاسبه در مثلثات:

۲۱. حاصل این عبارت را محاسبه کنید:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \text{ربع اول: } 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2} & \text{به شرطی که } 4 \\ \text{ربع دوم: } 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi & \text{به شرطی که } -4 \\ \text{ربع سوم: } (2k+1)\pi < \alpha < 3k\pi + \frac{3\pi}{4} & \text{به شرطی که } 4 \\ \text{ربع چهارم: } 2k\pi + \frac{3\pi}{4} < \alpha < (2k+2)\pi & \text{به شرطی که } -4 \end{cases}$$

تابع $f(\alpha)$ ، تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است. نمایش تغییر این تابع در فاصله‌ی از $-\pi$ تا π در این جارسم شده است.

نقاطه‌های $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ ، نقطه‌های ناپیوستگی تابع هستند:



$$f(\alpha) = (\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}) \times (\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}})$$

حل: $| \sin\alpha | \leq 1$ و $| \cos\alpha | \leq 1$. بنابراین $1 \pm \sin\alpha$ و $1 \pm \cos\alpha$ مقدارهای زیر رادیکال‌ها، همیشه مثبت هستند و می‌توان عملهای مربوط به رادیکال‌ها را درباره‌ی آن‌ها انجام داد:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{(1-\sin\alpha) - (1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

به همین ترتیب به دست می‌آید: