اشاره

در شماره‌های قبل درباره‌ی اتحاد و معادله، تجزیه‌ی چند جمله‌ای دلخواه و مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله‌ها بحث شد. اینک در ادامه‌ی مقاله‌ی شماره‌ی قبل بقیه‌ی مسئله‌های گوناگون درباره‌ی معادله‌ها را در پی می‌آوریم.

اتحاد و معادله (۱۴)

معادله‌های با توان مجهول و معادله‌های لگاریتمی

• پرویز شهریاری

۱۳. $4^{\sqrt{x-2}} + 16 - 10\times 2^{\sqrt{x-2}} = 0$.

حل: ۴ را به صورت ۲^۲ می‌نویسیم:

$$2^{2\sqrt{x-2}} - 10\times 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0$$

که با فرض $y = 2^{\sqrt{x-2}}$، به‌دست می‌آید:

$$y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow y_1 = 2 \text{ و } y_2 = 8$$

بنابراین:

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2 \text{ و } 2^{\sqrt{x-2}} = 8 = 2^3$$

یعنی $\sqrt{x-2} = 1$ و $\sqrt{x-2} = 3$ و درنتیجه:

$$x_1 = 3 \text{ و } x_2 = 11$$

۱۴. $2\log 2 + (1+\frac{1}{2x})\log 3 - \log(\sqrt[x]{3} + 27) = 0$.

حل: معادله‌ی مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\log 4 + \log(3^{1+\frac{1}{2x}}) = \log(\sqrt[x]{3} + 27)$$

با اندکی تبدیل به‌دست می‌آید:

$$\log(4\times 3\times 3^{\frac{1}{2x}}) = \log(3^x + 27)$$

$$\Rightarrow 12\times 3^{\frac{1}{2x}} = 3^x + 27$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{1}{x}} - 12\times 3^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}} + 27 = 0$$

اگر $3^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}}$ را y فرض کنیم، $3^{\frac{1}{x}}$ برابر y^2 می‌شود و به معادله‌ی درجه‌ی دوم زیر می‌رسیم:

$$y^2 - 12y + 27 = 0 \Rightarrow y_1 = 9 \text{ و } y_2 = 3$$

پاسخ: $x_1 = \frac{1}{4}$ و $x_2 = \frac{1}{3}$.

۱۵. $2x^{\log x} + 3x^{-\log x} = 5$.

حل: داریم:

$$2x^{\log x} + \frac{3}{x^{\log x}} = 5$$

که به صورت این معادله درمی‌آید:

$$2x^{2\log x} - 5x^{\log x} + 3 = 0$$

که نسبت به $x^{\log x}$ از درجه‌ی دوم است و بنابراین:

$$x^{\log x} = 1 \text{ و } x^{\log x} = \frac{3}{2}$$

از حل معادله‌ی اول به‌دست می‌آید:

$$\log^2 x = 0 \text{ و } x = 1$$

و از حل معادله‌ی دوم:

$$\log^2 x = \log\frac{3}{2} \Rightarrow \log x = \pm\sqrt{\log\frac{3}{2}}$$

پاسخ: $x_1 = 1$ و $x_{2,3} = 10^{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$.

۱۶. $$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} = a$$

حل: داریم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\log_x a)} + \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\log_x a-1)} = a$$

روشن است که $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$؛ بنابراین:

$$\sqrt{\frac{1}{4}(1+\log_a x)+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{\log_a x})} + \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x-1)+\frac{1}{4}(\frac{1}{\log_a x}-1)} = a$$

که می‌توان آن را چنین نوشت:

$$\sqrt{\frac{(1+\log_a x)^2}{4\log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x-1)^2}{4\log_a x}} = a \qquad (1)$$

در حالتی که $\log_a x > 1$ باشد، $a > 1$ است و معادله‌ی (۱) چنین می‌شود:

$$\log_a x = a\sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = a^2 \Rightarrow x = a^{a^2}$$

در حالت $0 < \log_a x \le 1$، $a > 1$ و معادله‌ی (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{1+\log_a x}{2\sqrt{\log_a x}} - \frac{\log_a x - 1}{2\sqrt{\log_a x}} = a$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$1 = a\sqrt{\log_a x} \Rightarrow \log_a x = \frac{1}{a^2} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{a^2}}$$

پاسخ: $x_1 = a^{a^2}$ و $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$.

۱۷. $$\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$$

حل: معادله‌ی اول دستگاه را به این صورت می‌نویسیم:

$$(3^{\frac{x}{2}})^2 - (2^{\frac{y^2}{2}})^2 = 77$$

از تقسیم دو طرف این معادله بر دو طرف معادله‌ی دوم، به معادله‌ای می‌رسیم که با معادله‌ی دوم، این دستگاه را تشکیل می‌دهند:

$$\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{y^2}{2}} = 11 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$$

پاسخ: $x_1 = 4$، $y_1 = \sqrt{2}$، $x_2 = 4$ و $y_2 = -\sqrt{2}$.

۱۸. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^m = y^n \end{cases}$ به شرط $m \neq n$.

حل: از معادله‌ی اول، x را به دست می‌آوریم:

$$x = y^{\frac{x}{y}}$$

که می‌توان آن را این طور نوشت:

$$x^m = y^{\frac{mx}{y}} \qquad (1)$$

از مقایسه‌ی این معادله با معادله‌ی دوم دستگاه به دست می‌آید:

$$y^n = y^{\frac{mx}{y}}$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم: یا $y = 1$ و یا $n = \frac{mx}{y}$؛ یعنی:

$$y = \frac{mx}{n} \qquad (2)$$

برای $y = 1$، به دست می‌آید $x = 1$.

اگر مقدار y را از رابطه‌ی (۲) در معادله‌ی دوم دستگاه قرار دهیم:

$$x^m = x^n.(\frac{m}{n})^n$$

یا:

$$x^{m-n} = (\frac{m}{n})^n$$

که از آن‌جا، مقدار x به‌دست می‌آید:

پاسخ: $\begin{vmatrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} x_2 = (\frac{m}{n})^{\frac{n}{m-n}} \\ y_2 = (\frac{m}{n})^{\frac{n}{m-n}} \end{vmatrix}$

۱۹. $\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y \end{cases}$ با شرط $x>0$ ، $y>0$ ، $a>0$ ، $b>0$ ؛ $a\neq b$ ، $a\neq 1$ و $b\neq 1$.

راه‌حل اول: از دو طرف معادله‌ی دوم لگاریتم می‌گیریم:

$$x\log a = y\log b \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم: $x=b^t$ و $y=a^z$. در این صورت معادله‌ی اول به این صورت درمی‌آید:

$$b^{yt}=a^{xz}$$

چون با توجه به معادله‌ی دوم $b^y=a^x$ است، بنابراین:

$$a^{tx}=a^{xz}\Rightarrow tx=xz\Rightarrow x(t-z)=0$$

یعنی یا $x=0$ و یا $t=z$.

برای $x=0$ ، مقدار y مساوی صفر می‌شود که با شرط‌های مسئله نمی‌سازد. برای $z=t$ داریم:

$$x=b^z \text{ و } y=a^z \qquad (2)$$

که اگر در رابطه‌ی (۱) به جای x و y قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$b^z\log a = a^z\log b \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^z = \frac{\log b}{\log a}$$

و از آن‌جا:

$$z = \frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log\frac{b}{a}} = \frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}\cdot\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}$$

نسبت لگاریتم‌های دو عدد، به مبنایی که لگاریتم در آن‌ها محاسبه شده است، مربوط نیست، بنابراین:

$$b^{\frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}} = b^{\frac{\log_b\frac{\log b}{\log a}}{\log_b b}} = \frac{\log b}{\log a};$$

$$\frac{\log\frac{\log b}{\log a}}{\log b}\cdot\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}} = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}}$$

$$x=b^z=b$$

درنتیجه، با شرط $\frac{\log b}{\log a}>0$ داریم:

$$x = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log b}{\log\frac{b}{a}}}$$

و به همین ترتیب:

$$y = \left(\frac{\log b}{\log a}\right)^{\frac{\log a}{\log\frac{b}{a}}}$$

ولی با شرط $\frac{\log b}{\log a}<0$ ، معادله بدون پاسخ است.

راه حل دوم: داریم:

$$y\log x = x\log y \qquad (1)$$

$$x\log a = y\log b \qquad (2)$$

از دو رابطه‌ی بالا، به این رابطه می‌رسیم:

$$\frac{\log y}{\log x}=\frac{\log a}{\log b} \qquad (3)$$

اگر از رابطه‌ی (۲)، یک‌بار دیگر لگاریتم بگیریم (با فرض $\log a>0$ و $\log b>0$)، به‌دست می‌آید:

$$\log x-\log y=\log\log b-\log\log a \qquad (4)$$

با حل دستگاه معادله‌های شامل (۳) و (۴)، مقدارهای $\log x$ و $\log y$ به‌دست می‌آید و پاسخ وقتی وجود دارد که $\frac{\log b}{\log a}>0$ باشد.

و اینک، یک مسأله می‌شود:

۲۰. الف) زاویه‌های B و C یک مثلث را با معلوم بودن زاویه‌ی A و رابطه‌ی $\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=m$ به‌دست آورید ($m>0$).

ب) از بخش الف نتیجه بگیرید: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$.

حل: الف) زاویه‌های B و C جواب‌های این دستگاه هستند:

$$\begin{cases} \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2} \\ \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=m \end{cases}$$

($B>0$ ، $C>0$). از معادله‌ی دوم دستگاه نتیجه می‌شود:

$$\cos\frac{B-C}{2}=2m+\sin\frac{A}{2}$$

α را زاویه‌ی حاده‌ای در نظر می‌گیریم که کسینوس آن برابر $2m+\sin\frac{A}{2}$ باشد؛ یعنی: $\frac{B-C}{2}=\alpha$. آن‌وقت:

$$C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\alpha;\quad B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\alpha$$

شرط این‌که α وجود داشته باشد، این است که داشته باشیم:

$$2m+\sin\frac{A}{2}\le 1$$

برای این‌که زاویه‌های B و C مثبت باشند، با فرض $B > C$ باید داشته باشیم:

$$\alpha < \frac{\pi}{۲} - \frac{A}{۲} \quad \text{یا و} \quad \cos\alpha > \sin\frac{A}{۲}$$

بنابراین، شرط وجود جواب عبارت است از:

$$\sin\frac{A}{۲} < ۲m + \sin\frac{A}{۲} \leq ۱$$

از نابرابری سمت راست نتیجه می‌شود:

$$m \leq \frac{۱}{۲}(۱ - \sin\frac{A}{۲})$$

ب) از بحث بالا نتیجه می‌شود:

$$\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leq \frac{۱}{۲}(۱ - \sin\frac{A}{۲})$$

دو طرف نابرابری را در $\sin\frac{A}{۲} > ۰$ ضرب می‌کنیم:

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leq \frac{۱}{۲}(۱ - \sin\frac{A}{۲})\sin\frac{A}{۲}$$

$(۱ - \sin\frac{A}{۲})\sin\frac{A}{۲}$، حاصل ضرب دو عامل مثبت به مجموع واحد است و حداکثر حاصل ضرب در حالت برابری آن‌ها به‌دست می‌آید؛ یعنی وقتی که $\sin\frac{A}{۲} = \frac{۱}{۲}$ باشد. درنتیجه:

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leq \frac{۱}{۸}$$

و این هم یک مسئله درباره‌ی محاسبه در مثلثات:

۲۱. حاصل این عبارت را محاسبه کنید:

$$f(\alpha) = \left(\sqrt{\frac{۱-\sin\alpha}{۱+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}}\right)$$
$$\times\left(\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۱-\cos\alpha}}\right)$$

حل: $|\sin\alpha| \leq ۱$ و $|\cos\alpha| \leq ۱$. بنابراین $۱ \pm \sin\alpha$ و $۱ \pm \cos\alpha$، یعنی مقدارهای زیر رادیکال‌ها، همیشه مثبت هستند و می‌توان عمل‌های مربوط به رادیکال‌ها را درباره‌ی آن‌ها انجام داد:

$$\sqrt{\frac{۱-\sin\alpha}{۱+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}} = \frac{(۱-\sin\alpha)-(۱+\sin\alpha)}{\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}} = \frac{۲\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

به همین ترتیب به دست می‌آید:

$$\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{۱+\cos\alpha}{۱-\cos\alpha}} = \frac{۲\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$$

برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی اول دایره باشد، $\sin\alpha$ مثبت و بنابراین $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ است. و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی دوم دایره باشد، $\sin\alpha$ منفی و بنابراین $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ است.

همچنین، برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی راست دایره باشد، $\cos\alpha$ مثبت و بنابراین $|\cos\alpha| = \cos\alpha$، و برای کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در نیمه‌ی چپ دایره باشد، $\cos\alpha$ منفی و $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ است. بنابراین داریم:

$$f(\alpha)\begin{cases} ۴ \text{ به شرطی که } ۲k\pi < \alpha < ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \ \text{(مربع اول)} \\ -۴ \text{ به شرطی که } ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} < \alpha < (۲k+۱)\pi \ \text{(مربع دوم)} \\ ۴ \text{ به شرطی که } (۲k+۱)\pi < \alpha < ۳k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \ \text{(مربع سوم)} \\ -۴ \text{ به شرطی که } ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} < \alpha < (۲k+۲)\pi \ \text{(مربع چهارم)} \end{cases}$$

تابع $f(\alpha)$، تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است. نمایش تغییر این تابع در فاصله‌ی از $-\pi$ تا π در این‌جا رسم شده است.

نقطه‌های $\alpha = k\frac{\pi}{۲}$، نقطه‌های ناپیوستگی تابع هستند: