مسابقه‌های ریاضی در کشورهای گوناگون دنیا (۸)

• هوشنگ شرقی

گزیده‌ای از سؤالات مسابقه‌ی ریاضی شهر نیومکزیکو

سؤالات

۱. کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$\sqrt{\frac{۷}{۶}}+\sqrt{\frac{۹۶}{۷}},\sqrt{\frac{۸}{۶}}+\sqrt{\frac{۹۶}{۸}},\sqrt{\frac{۹}{۶}}+\sqrt{\frac{۹۶}{۹}},\dots,\sqrt{\frac{۹۵}{۶}}+\sqrt{\frac{۹۶}{۹۵}}$$

۲. الف) عددهای طبیعی a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

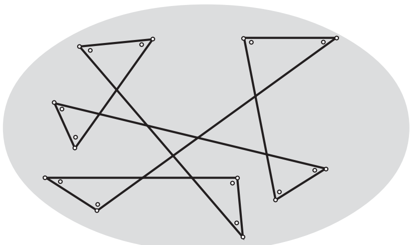
$$\text{tg}\frac{۳\pi}{۸}=a+\sqrt{b}\ .$$

ب) نشان دهید که عبارت $(\text{tg}\frac{۳\pi}{۸})^n+(-\cot g\frac{۳\pi}{۸})^n$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، همواره برابر یک عدد صحیح زوج است.

ج) برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $k_n=\left[(\text{tg}\frac{۳\pi}{۸})^n\right]$ ([ ] علامت جزء صحیح است). نشان دهید که همواره n و k_n زوجیت متفاوت دارند.

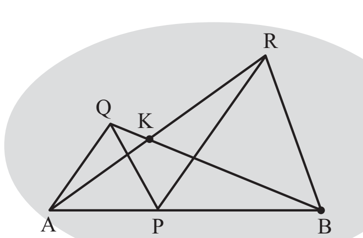
۳. یک شرط لازم و کافی برای پارامتر k بیابید، به‌طوری که معادله‌ی $۲\sin\theta+k\cos\theta=\sqrt{۷}$ دارای جواب باشد.

۴. مجموع دوازده زاویه‌ای را که در شکل مشخص شده‌اند، به‌دست آورید.

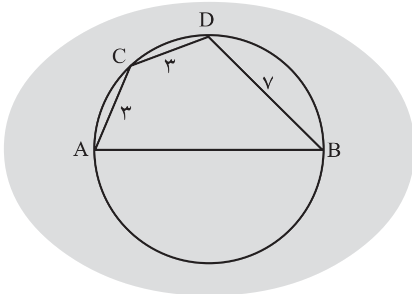


۵. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد و هر سه مثلث PAB، PBC و PCA متساوی‌الساقین باشند. چند وضع برای نقطه‌ی P وجود دارد؟

۶. در شکل زیر، P نقطه‌ای متغیر روی پاره‌خط AB است و مثلث‌های QAB و RPB متساوی‌الاضلاع هستند. مکان هندسی نقطه‌ی K، محل برخورد AR و BQ را به‌دست آورید.



۷. در شکل زیر، AB قطر دایره است و $AC = DC = ۳$ و $DB = ۷$. اندازه‌ی شعاع دایره چیست؟



حل

۱. با توجه به نابرابری واسطه‌های حسابی- هندسی و جمله‌ی عمومی دنباله می‌توان نوشت:

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{۶}} + \sqrt{\frac{۹۶}{n}} \ge ۲\sqrt{\sqrt{\frac{n}{۶}} \times \sqrt{\frac{۹۶}{n}}} = ۲\sqrt{۴} = ۴$$

یعنی کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله مساوی ۴ است. و برای یافتن شماره‌ی این جمله، توجه می‌کنیم که برابری در نابرابری واسطه‌های حسابی- هندسی وقتی پیش می‌آید که $a = b$ باشد؛ یعنی:

$$\sqrt{\frac{n}{۶}} = \sqrt{\frac{۹۶}{n}} \Rightarrow n = \sqrt{۶\times ۹۶} = ۲۴$$

بنابراین کوچک‌ترین جمله‌ی این دنباله، جمله‌ی بیست و چهارم، یعنی $a_{۲۴} = ۴$ است.

۲. الف) به روش‌های گوناگونی می‌توان مقدار $tg\frac{۳\pi}{۸}$ را به‌دست آورد. یکی از آن‌ها، استفاده از اتحاد مثلثاتی $tg\frac{x}{۲} = \frac{\sin x}{۱+\cos x}$ است که به‌عنوان تمرین می‌توانید به سادگی آن را اثبات کنید. می‌توان نوشت:

$$tg\frac{x}{۲} = \frac{\sin x}{۱+\cos x} \Rightarrow tg\frac{۳\pi}{۸} = \frac{\sin\frac{۳\pi}{۴}}{۱+\cos\frac{۳\pi}{۴}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}} =$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲-\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}(۲+\sqrt{۲})}{۴-۲} = \frac{۲\sqrt{۲}+۲}{۲} = \sqrt{۲}+۱$$

$$\Rightarrow a = ۱, b = ۲$$

ب) با توجه به نتیجه‌ی الف خواهیم داشت:

$$\cot g\frac{۳\pi}{۸} = \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱} = \sqrt{۲}-۱ \Rightarrow (tg\frac{۳\pi}{۸})^n + (-\cot g\frac{۳\pi}{۸})^n$$
$$= (۱+\sqrt{۲})^n + (۱-\sqrt{۲})^n$$

حال اگر با استفاده از بسط دو جمله‌ای نیوتون به صورت زیر:

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \cdots + \binom{n}{n}$$

پرانتزها را بسط دهیم، عبارت‌های گنگ با هم حذف و عبارت‌های گویای برابر، دو به دو با هم جمع می‌شوند و یک عبارت مضرب ۲ به‌دست می‌آید:

$$(۱+\sqrt{۲})^n + (۱-\sqrt{۲})^n = ۲t$$

ج) با توجه به نتیجه‌ی ب خواهیم داشت:

$$(tg\frac{۳\pi}{۸})^n = (۱+\sqrt{۲})^n = ۲t-(۱-\sqrt{۲})^n$$

و با توجه به این که $۱-\sqrt{۲}$ عددی منفی است، اگر n فرد باشد، $-(۱-\sqrt{۲})^n$ مثبت و اگر n زوج باشد، منفی خواهد بود. با توجه به این‌که قدر مطلق $۱-\sqrt{۲}$ کمتر از یک است، قدر مطلق $(۱-\sqrt{۲})^n$ نیز کمتر از یک خواهد بود. لذا $(tg\frac{۳\pi}{۸})^n$ تفاضل عدد زوج ۲t از یک عدد، کمتر از یک است. بنابراین، اگر n فرد باشد، این مقدار از ۲t تجاوز می‌کند و درنتیجه: $k_n = \left[(tg\frac{۳\pi}{۸})^n\right] = ۲t$. و به ازای nهای زوج نیز: $k_n = ۲t-۱$. بنابراین n و k_n از نظر زوجیت نقطه‌ی مقابل یکدیگر هستند.

۳. این یک مسئله‌ی کاملاً شناخته شده و کلاسیک در مثلثات است. درواقع قضیه‌ای شناخته‌شده می‌گوید: شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$ دارای جواب باشد، آن است که: $a^۲+b^۲ \ge c^۲$.

به عنوان تمرین سعی کنید این رابطه را اثبات کنید. برای این منظور بنویسید:

$$a\sin x + b\cos x = c \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

حال فرض کنید: $\frac{b}{a} = tg\varphi$ و از آن‌جا نتیجه بگیرید:

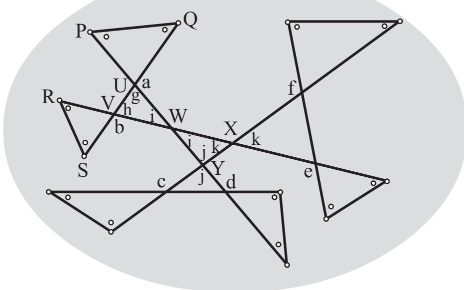
$$\sin x + tg\varphi\cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

حال مقدار $\cos\varphi$ را برحسب a و b به‌دست آورید و با توجه به این‌که $|\sin(x+\varphi)| \le ۱$، نتیجه‌ی فوق را اثبات کنید. اکنون با استفاده از این دستور، حل مسئله بسیار آسان می‌شود:

$$۲\sin\theta + k\cos\theta = \sqrt{۷}$$
$$\Rightarrow ۲^۲+k^۲ \ge (\sqrt{۷})^۲ \Rightarrow k^۲ \ge ۳ \Rightarrow k \ge \sqrt{۳} \text{ یا } k \le -\sqrt{۳}$$

۴. مسئله‌ی نسبتاً آسانی است! کافی است از ویژگی مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها و زاویه‌های خارجی استفاده کنیم. اگر مطابق شکل زیر زوایا را نام‌گذاری کنیم، خواهیم داشت:



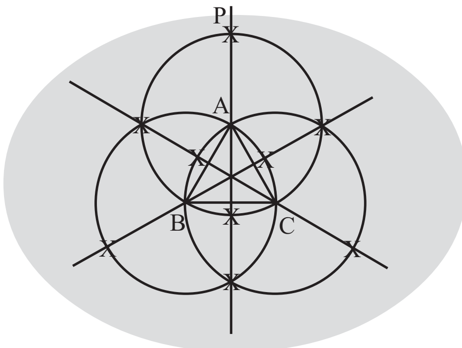
$$g+h+i=۱۸۰^\circ \text{ و } g+h+a+b=۲\times۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow a+b=۱۸۰^\circ+i$$

به طریق مشابه نتیجه می‌شود: $c+d=j+۱۸۰^\circ$ و $e+f=k+۱۸۰^\circ$ و با توجه به ویژگی زاویه‌های خارجی در مثلث، به‌سادگی نتیجه می‌شود که مجموع دوازده زاویه‌ی مورد نظر برابر است با مجموع زوایای a، b، c، d، e و f:

$$a+b+c+d+e+f=\underbrace{(i+j+k)}_{۱۸۰^\circ}+۳\times۱۸۰^\circ=۴\times۱۸۰^\circ=۷۲۰^\circ$$

۵. کافی است به شکل زیر توجه کنید:

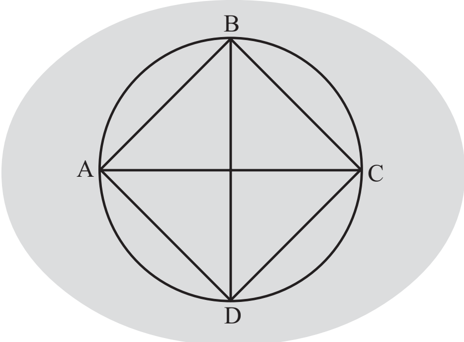


از آن‌جا ده جواب متمایز برای نقطه‌ی P را در شکل علامت بزنید.

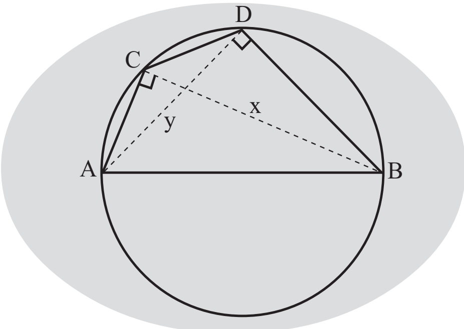
۶. یک ایده‌ی بسیار جالب برای حل مسئله، توجه به این نکته است که با در نظر گرفتن نقطه‌ی P به‌عنوان مرکز دوران، می‌توان Q را دوران‌یافته‌ی A حول P به اندازه‌ی ۶۰° و B را دوران‌یافته‌ی R حول P و به اندازه‌ی ۶۰° در نظر گرفت. لذا پاره‌خط BQ دوران‌یافته‌ی AR حول P به اندازه‌ی ۶۰° است و از قضایای تبدیل‌های هندسی می‌دانیم، دوران‌یافته‌ی هر پاره‌خط، با آن زاویه‌ای مساوی زاویه‌ی دوران می‌سازد؛ یعنی: $\angle AKQ=۶۰^\circ$.

درنتیجه: $\angle AKB=۱۲۰^\circ$ و چون AB ثابت است، لذا مکان هندسی K، کمان درخور زاویه‌ی ۱۲۰° تحت پاره‌خط AB است.

۷. مسئله‌ی خوبی است که راه‌های گوناگونی برای حل آن وجود دارد. یک راه، استفاده از قضیه‌ای موسوم به «قضیه‌ی **بطلمیوس**» در مورد چهارضلعی محاطی ABCD است. این قضیه می‌گوید: $AB\times CD+AD\times BC=AC\times BD$ (اثبات قضیه را می‌توان در بسیاری از کتاب‌های هندسه دید).



اکنون با توجه به این قضیه و با توجه به این‌که زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر مساوی ۹۰° است و به کمک قضیه‌ی فیثاغورس، می‌توان نوشت:



$$AC\times BD+CD\times AB=BC\times AD$$
$$\Rightarrow ۳\times۷+(۲R)=xy\Rightarrow xy=۶R+۲۱,$$
$$x=\sqrt{AB^۲-AC^۲}=\sqrt{۴R^۲-۹}$$
$$y=\sqrt{AB^۲-BD^۲}=\sqrt{۴R^۲-۴۹}\Rightarrow\sqrt{(۴R^۲-۹)(۴R^۲-۴۹)}$$
$$=۶R+۲۱\Rightarrow(۲R-۳)(۲R+۳)(۲R-۷)(۲R+۷)$$
$$=۹(۲R+۷)^۲\Rightarrow(۲R-۳)(۲R+۳)(۲R-۷)=۹(۲R+۷)$$

و با فرض $t=۲R$ و پس از ساده‌کردن رابطه‌ی فوق، به معادله‌ی $t^۳-۷t^۲-۱۸t=۰$ می‌رسیم که از حل آن خواهیم داشت:

$$t(t^۲-۷t-۱۸)=۰$$
$$\Rightarrow t(t-۹)(t+۲)=۰\Rightarrow t=۹\Rightarrow R=\frac{۹}{۲}$$