

احتمال شرطی در فضاهاى هم شانس و غیر هم شانس

• حمیدرضا امیری

وجود داشته باشند، به قسمی که: $p(\{S_i\}) \neq p(\{S_j\})$ ، در این صورت برای محاسبه $p(A)$ باید احتمال همه ی پیشامدهای ساده ی A را با هم جمع کنیم؛ یعنی:

$$p(A) = p(\{S_1\}) + \dots + p(\{S_k\})$$

در واقع، از رابطه ی $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ فقط در فضاهاى هم شانس می توان استفاده کرد. بنابراین، اگر فرمول احتمال شرطی را به صورت زیر ساده کنیم، یعنی بنویسیم:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

فقط زمانی حق داریم از ساده شده ی این فرمول استفاده کنیم که فضای نمونه ای S ، فضایی هم شانس تعریف شده باشد.

به مثال زیر توجه کنید:

مثال: اگر $S = \{a, b, c, d\}$ ، به طوری که $p(\{a, b\}) = \frac{1}{5}$ و $p(\{a\}) = p(\{b\})$ و $p(\{c\}) = p(\{d\})$ ، در این صورت مطلوب است محاسبه ی:

می دانیم، احتمال رخداد پیشامد A به شرط آن که پیشامد B (هر دو از فضای نمونه ای S) رخ داده باشد، از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

از طرف دیگر می دانیم، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه ای یک پدیده یا آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ پیشامدی تصادفی در فضای نمونه ای S باشد و فرض کنیم: $A = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ ، در این صورت برای محاسبه ی $p(A)$ دو حالت در نظر گرفته می شود:

۱. اگر فضای نمونه ای S هم شانس باشد، یعنی برای هر i و j

داشته باشیم: $p(\{S_i\}) = p(\{S_j\}) = \frac{1}{n}$ ، در این صورت:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{k}{n}$$

که در واقع، همان مجموع احتمال پیشامدهای ساده ی A

است، یعنی:

$$p(A) = p(\{S_1\}) + p(\{S_2\}) + \dots + p(\{S_k\}) = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

۲. اگر فضای نمونه ای S غیر هم شانس باشد، یعنی i و j از

$$\text{رابطه ی } p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \text{ استفاده کرد.}$$

منظور اصلی ام را از نوشتن این مقاله، با ذکر یک مثال و در واقع طرح یک سؤال و ایجاد چالشی بیان می کنم!

مثال: خانواده ای دو فرزند دارد. اگر بدانیم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، چه قدر احتمال دارد فرزند دیگر هم پسر باشد؟
حل: واضح است که فضای نمونه ای این پدیده یک فضای هم شانس است. یعنی اگر

$$S = \{(د و پ) و (پ و د) و (د و د) و (پ و پ)\}$$

فضای نمونه ای باشد، همواره:

$$p(\{(پ و پ)\}) = p(\{(د و د)\}) = p(\{(پ و د)\}) = p(\{(د و پ)\}) = \frac{1}{4}$$

یعنی:

$$p(\{(پ و پ)\}) = p(\text{اولی پسر و دومی پسر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p(\{(پ و د)\}) = p(\text{اولی دختر و دومی پسر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

قبل از این که بخواهیم مسئله را از طریق فرمول احتمال شرطی حل کنیم، به طور معمول و طبیعی چه جوابی برای مسئله به ذهن شما می رسد؟ احتمال پسر بودن یک فرزند چه قدر است؟ بله درست فکر کرده اید. احتمال $\frac{1}{2}$ است. در واقع اگر خانواده ای هر تعداد فرزند داشته باشد، احتمال آن که یکی از آن ها (فرق نمی کند کدام یکی، اولی، دومی، ... یا آخری) پسر باشد، همواره $\frac{1}{2}$ است.

حالا همین مسئله را از طریق احتمال شرطی حل می کنیم؛ یعنی با محدود کردن فضای نمونه ای. می دانیم که گذاشتن شرط روی هر مسئله ای احتمال، فضای نمونه ای را محدود می کند. در این مثال نیز چون شرط کرده ایم یکی از فرزندان این خانواده پسر است، پس حالت (د و د) از بین می رود. یعنی اگر فرض کنیم، B پیشامدی باشد که رخ داده است و A پیشامد مطلوبی که به دنبال محاسبه ی احتمال آن هستیم، خواهیم داشت:

$$A = \{(پ و پ)\} \text{ و } B = \{(پ و پ) و (پ و د) و (د و پ)\}$$

$$\Rightarrow p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

به نظر شما کدام جواب، جواب واقعی و صحیح است: $\frac{1}{3}$ یا

$\frac{1}{2}$ ؟ اگر $\frac{1}{2}$ جواب صحیح است، اشتباه کجا صورت گرفته؟ حال

اگر بخواهیم همین مسئله را از طریق «قانون بیز» حل کنیم، کدام یک از دو جواب تأیید می شود؟

فرض کنیم A پیشامد آن باشد که فرزند دیگر هم پسر باشد (هر دو پسر)، و B پیشامد آن باشد که یکی از فرزندان پسر باشد. پس به

$$\text{الف) } p(\{a, b, c\}|\{b, c, d\})$$

$$\text{ب) } p(\{d\}|\{b, d\})$$

حل: واضح است که S فضایی غیر هم شانس است. پس ابتدا احتمال هر پیشامد ساده ی فضا را می یابیم (پیشامد ساده به پیشامدهای تک عضوی گفته می شود).

$$p(\{a, b\}) = p(\{a\}) + p(\{b\}) = \frac{1}{5}$$

$$\text{فرض} \Rightarrow p(\{a\}) + p(\{a\}) = \frac{1}{5} \Rightarrow p(\{a\}) = \frac{1}{10} = p(\{b\})$$

$$p(S) = 1 \Rightarrow p(\{a\}) + p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\}) = 1$$

$$\text{فرض} \Rightarrow p(\{c\}) + p(\{c\}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow p(\{c\}) = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow p(\{d\}) = \frac{2}{5}$$

$$\text{الف) } p(\{a, b, c\}|\{b, c, d\}) = \frac{p(\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\})}{p(\{b, c, d\})}$$

$$= \frac{p(\{b, c\})}{p(\{b, c, d\})} = \frac{p(\{b\}) + p(\{c\})}{p(\{b\}) + p(\{c\}) + p(\{d\})}$$

$$= \frac{\frac{1}{10} + \frac{2}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{10} + \frac{4}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}$$

$$\text{ب) } p(\{d\}|\{b, d\}) = \frac{p(\{d\} \cap \{b, d\})}{p(\{b, d\})} = \frac{p(\{d\})}{p(\{b\}) + p(\{d\})}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{4}{10}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{10}} = \frac{4}{5}$$

$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \text{ حال اگر به اشتباه بخواهیم از رابطه ی}$$

استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\text{الف) } p(\{a, b, c\}|\{b, c, d\}) = \frac{n(\{b, c\})}{n(\{b, c, d\})} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) } p(\{d\}|\{b, d\}) = \frac{n(\{d\})}{n(\{b, d\})} = \frac{1}{2}$$

که در هر دو مورد جواب غلط است. بنابراین، توجه به این مطلب اهمیت دارد که در فضاهای غیر هم شانس، هیچ گاه نباید از

دنبال همان $p(A|B)$ هستیم که طبق قانون بیز داریم:

$$p(A|B) = \frac{p(A)}{p(B)} \times p(B|A)$$

$$p(A) = \frac{1}{4} \quad p(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad p(B|A) = 1$$

$p(B|A)$ یعنی احتمال آن که یکی پسر باشد. اگر بدانیم هر دو پسرند، همواره این احتمال ۱ است.)

$$p(A|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

بنابراین مشاهده می شود، همان عددی که قبل از حل مسئله نیز حدس زده بودید، برای این احتمال حاصل می شود. لذا باید اشتباهی در محاسبه ی عدد $\frac{1}{3}$ صورت گرفته باشد!

در واقع این اشتباه از آن جا ناشی می شود که ما توجه نکردیم، زمانی که شرطی روی یک مسئله گذاشته می شود و فضای نمونه ای محدود می شود، این امکان وجود دارد که شرط گذاشته شده، فضای نمونه ای را از حالت هم شانس خارج کند و فضای نمونه ای محدود شده، به یک فضای نمونه ای غیرهم شانس تبدیل شود. به عبارت دیگر، گاهی اوقات شرط گذاشته شده چنان است که دیگر در فضای نمونه ای حاصل، احتمال هر عضو فضای نمونه ای با اعضای دیگر برابر نیست.

در مثال فوق، ابتدا فضای نمونه ای به صورت زیر تعریف می شود.

$$S = \{(پ و د) \text{ و } (د و پ) \text{ و } (د و د) \text{ و } (پ و پ)\}$$

وقتی شرط می کنیم که «یکی از فرزندان پسر است»، واضح است که حالت (د و د) از S حذف و فضای نمونه ای محدود شده به صورت $\{(پ و د) \text{ و } (د و پ) \text{ و } (پ و پ)\} = S'$ حاصل می شود. حال این سؤال پیش می آید که آیا با شرط اعمال شده، S' یک فضای هم شانس است یا خیر؟ یعنی اگر ما بدانیم یکی از فرزندان پسر است، آیا شانس (د و پ) با شانس (پ و پ) یکسان است؟ مسلماً چنین نیست! در واقع، وقتی می دانیم یکی از فرزندان پسر است، شانس هر دو پسر از یکی پسر و یکی دختر بیشتر است. پس فضای غیرهم شانس تولید شده است و لذا حق نداریم در محاسبه ی

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S')}$$

احتمال، از رابطه ی

به یک مثال دیگر توجه کنید:

اگر سه کارت A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب با این ویژگی که A_1 هر دو طرفش قرمز و A_2 یک طرف قرمز و یک طرف آبی و A_3 هر دو طرف آبی، مفروض باشند و این سه کارت را در یک کیسه بریزیم و یک کارت به تصادف خارج کنیم، به شرط آن که بدانیم یک طرف کارت قرمز است، چه قدر احتمال دارد طرف دیگر آن نیز قرمز باشد؟

برای حل این مسئله نیز اگر نکات ذکر شده و مطلب مهم در مسئله ی قبل را در نظر بگیریم، جوابی اشتباه خواهیم یافت. به این ترتیب که می گوئیم چون می دانیم یک طرف کارت قرمز است، پس فضای نمونه ای حاصل و محدود شده به صورت $S' = \{A_1, A_2\}$ به دست می آید و احتمال آن که کارت A_1 (هر دو طرف قرمز) خارج شده است، برابر است با $\frac{1}{2}$ که این پاسخ اشتباه است. اما اگر به این نکته توجه کنیم که شرط گذاشته شده روی مسئله، فضای S' را به فضایی غیرهم شانس تبدیل کرده است، از «قانون بیز» و قانون احتمال کل که در آن ها از $n(A)$ یا $n(S')$ استفاده نمی شود، کمک می گیریم و به جواب درست هم خواهیم رسید!

حال فرض کنیم A پیشامد آن باشد که هر دو طرف قرمز باشد (کارت A_1 انتخاب شود) و B پیشامد آن باشد که یک طرف کارت قرمز است. پس باید $p(A|B)$ را محاسبه کنیم. طبق قانون بیز داریم:

$$p(A|B) = \frac{p(A)}{p(B)} \times p(B|A)$$

هم چنین برای محاسبه ی $P(B)$ به دو طریق می توان عمل کرد: یکی آن که احتمال قرمز بودن یک طرف کارت را مستقیماً با توجه به این که در سه کارت مفروض، سه طرف آبی و سه طرف قرمز داریم، پس احتمال قرمز بودن یک طرف قرمز برابر است با $\frac{3}{6}$ یا $\frac{1}{2}$.

و راه دیگر، استفاده از قانون احتمال کل است. به این ترتیب که کارت انتخاب شده یا A_1 است یا A_2 و یا A_3 . پس می توان نوشت:

$$p(B) = p(B|A_1) \times p(A_1) + p(B|A_2) \times p(A_2) + p(B|A_3) \times p(A_3)$$

$$\Rightarrow p(B) = 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$p(B|A_1)$ یعنی احتمال آن که یک طرف قرمز باشد، به شرط

آن که بدانیم کارت A_1 انتخاب شده که این احتمال ۱ است.)

مشاهده می کنید که از هر دو راه، احتمال قرمز بودن یک طرف

کارت $\frac{1}{2}$ است. پس می توان نوشت:

$$p(A|B) = \frac{p(A)}{p(B)} \times p(B|A) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \times 1 = \frac{2}{3}$$

$P(A)$ یعنی احتمال آن که کارت A_1 انتخاب شود و $P(B|A)$

یعنی احتمال آن که یک طرف قرمز باشد، به شرط آن که بدانیم A_1 انتخاب شده است.)

بنابراین، در حل مسائل احتمال شرطی باید به این نکته توجه کنیم که در مواردی ممکن است شرط اعمال شده روی مسئله، فضای نمونه ای محدود شده ی غیرهم شانس به وجود آورد که در این شرایط برای حل مسئله از قوانینی چون قانون بیز یا قانون احتمال کل استفاده خواهیم کرد.