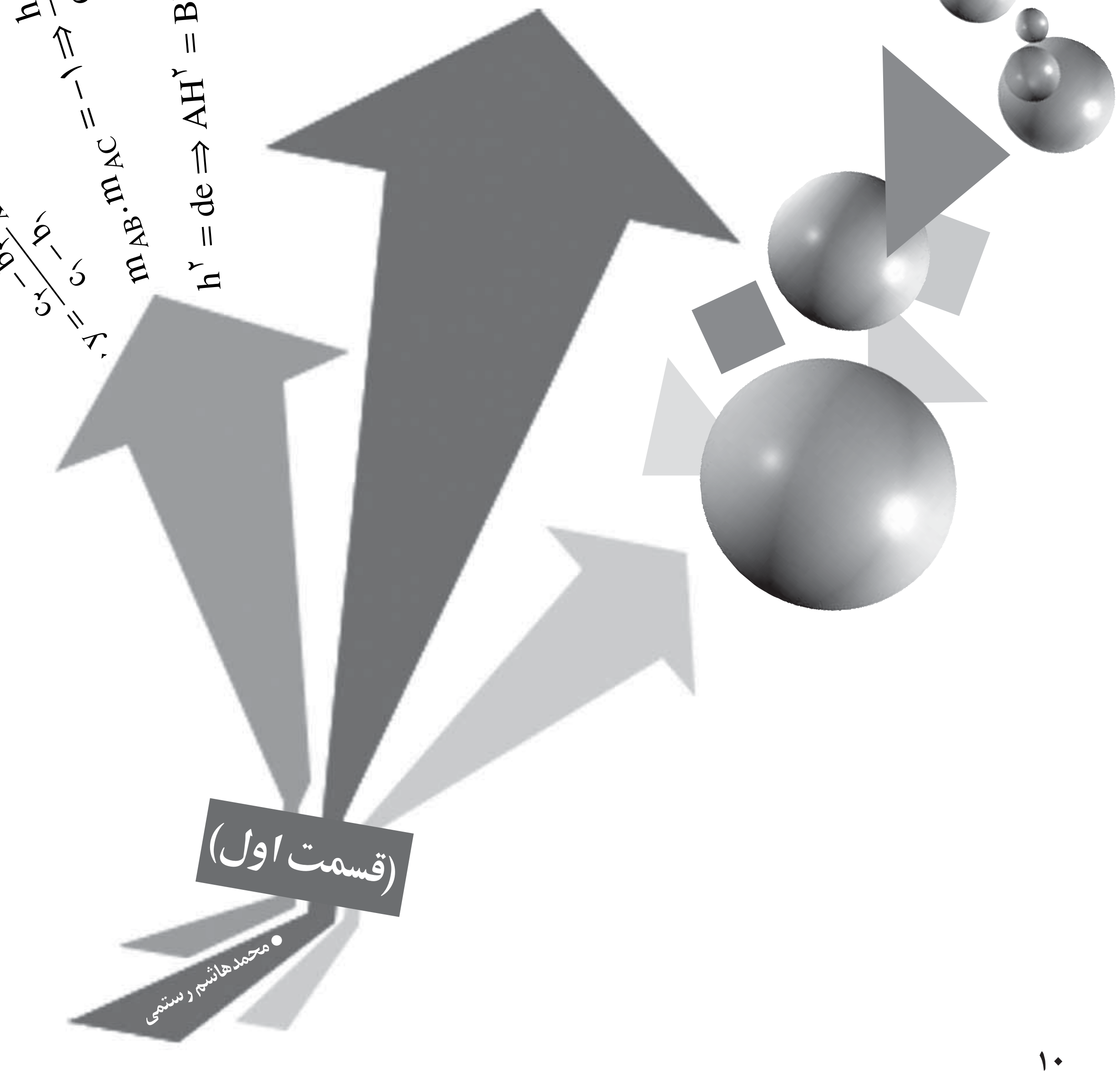
رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه



(قسمت اول)

• محمدهاشم رستمی

بین فلاسفه‌ی ریاضی و تاریخ‌دانان ریاضی، اختلاف نظر وجود دارد که آیا ابتدا مفاهیم مربوط به عدد در ریاضیات مطرح شد، یا مفاهیم مربوط به نقطه، خط، صفحه و پیوستارهای هندسی. ولی مسلم است که تکامل ریاضیات در ارتباط با پیشرفت‌های دو رشته‌ی حساب و هندسه صورت پذیرفته است؛ گرچه این دو عنصر اساسی ریاضیات همواره همدوش یکدیگر به پیش نرفته‌اند. چه بسیار اتفاق افتاده است که این دو با هم رقابت داشته‌اند.

اولین قدم واقعی ریاضی به‌وسیله‌ی هندسه برداشته شد. یونانیان سال‌های ۳۰۰ تا ۶۰۰ قبل از میلاد، به ریاضیات سازمان و رنگ تجرد و استدلال قیاسی دادند و ساختمان عظیم هندسه‌ی اصل موضوعی اقلیدسی را بنیان نهادند.

چون یونانیان به‌طور خالص پیرامون هندسه کار می‌کردند،

بنابراین هندسه‌ی اقلیدسی، **جبری** را که تا آن زمان شناخته شده بود، نیز دربرمی‌گرفت؛ مثلاً حل معادله‌ی درجه‌ی دوم یک‌مجهولی به روش هندسی انجام می‌شد.

پس از ویرانی تمدن یونان به‌وسیله‌ی **اسکندر مقدونی** و انتقال آن به اسکندریه در مصر، دانشمندان اسکندریه، حساب و جبر را به هندسه‌ی اقلیدسی اضافه کردند تا به این وسیله بتوانند نتایج کمی به دست آورند.

بعد از ریاضی‌دانان اسکندریه، ریاضی‌دانان اسلامی و ایرانی در پیشرفت و تکامل ریاضیات نقش عمده‌ای داشته‌اند. **محمدبن موسی خوارزمی** بنیان‌گذار جبر و مقابله است که کلمه‌ی جبر یا الجبرا[1] از نام کتاب وی گرفته شده و واژه‌ی «الگوریتم» نیز شکل لاتینی شده‌ی نام **الخوارزمی** است. کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی سال‌ها در مدارس اروپا و کشورهای اسلامی به‌عنوان کتاب درسی تدریس می‌شد؛ درواقع کتاب اصول اقلیدس، کتاب درسی هندسه و کتاب جبر و مقابله‌ی خوارزمی، کتاب درسی جبر در مدارس این کشورها بود.

در استاندارد ۸ مربوط به استانداردهای موضوعی NCTM که «**هندسه از دیدگاه جبری**» است، آمده است: «یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و ارتباط بین هندسه و جبر است.»

در تکامل هندسه که به پیدایش هندسه‌های جدید از جمله هندسه‌ی تحلیلی منجر شده است، ریاضی‌دانان ایرانی نقش مهمی داشته‌اند. حکیم **عمر خیام** (۴۳۹ـ۵۲۶ هـ. ق) اولین کسی است که در جبر و مقابله، معادلات را برحسب درجه‌ی مجهول مرتب و با روشی تحلیلی گونه حل و بحث کرد. خیام نخستین ریاضی‌دانی است که ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم را به روش هندسی به‌دست آورد و مقدمات کاربرد جبر در هندسه، یعنی هندسه‌ی تحلیلی را طرح‌ریزی کرد. اما هندسه‌ی تحلیلی به طور رسمی توسط **رنه دکارت**[2] (۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰) در سال ۱۶۱۹ به دنیا معرفی شد و **پی یر فرما**[3] (۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵) نیز تقریباً هم‌زمان با دکارت، این هندسه را کشف کرد.

با پیدایش هندسه‌ی تحلیلی در قرن هفدهم میلادی، ریاضیات گام بزرگی به جلو برداشت، زیرا این امکان به‌وجود آمد که ایده‌های هندسی ریاضی‌دانان باستان، به زبان هندسه‌ی مختصاتی بیان شود و بسط و گسترش یابد و درنتیجه ابزار جدیدی برای حل دامنه‌ی وسیعی از مسأله‌ها فراهم شود.

درواقع، تناظری مستقیم بین مفاهیم و ایده‌های پایه‌ای هندسه در دو دیدگاه هندسی و جبری وجود دارد. نقطه، خط و صفحه، از مفاهیم اساسی و تعریف‌نشده‌ی هندسه هستند. اگرچه این موضوع‌ها تعریف نشده‌اند، ولی به وسیله‌ی اصول موضوعه‌ی معینی تبیین و توصیف شده‌اند. این مفهوم‌ها در دیدگاه جبری ارائه می‌شوند.

اینک ارتباط بین دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری در صفحه (دو بعد) را بررسی می‌کنیم. اگر صفحه‌ی E به مفهوم هندسی را به یک دستگاه مختصات دکارتی [متعامد] متشکل از دو محور مختصات عمود بر هم و مجهز کنیم، یک تناظر یک‌به‌یک بین صفحه‌ی E و حاصل‌ضرب دکارتی $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ [ضرب دکارتی روی اعداد حقیقی] برقرار می‌شود. به این ترتیب که به هر نقطه‌ی P از صفحه‌ی E، یک زوج مرتب (x و y) از اعداد حقیقی نظیر می‌شود و برای هر زوج مرتب (x و y)، نقطه‌ای نظیر، در صفحه‌ی مختصات وجود خواهد داشت. درحقیقت، دستگاه **مختصات دکارتی، ابزار اصلی برای ایجاد ارتباط بین هندسه و جبر است** و تحت این شرایط:

نقطه‌ی P از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}} \{(x,y)|x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$

و این صفحه به مفهوم جبری است.

صفحه‌ی E به مفهوم هندسی $\xleftrightarrow[\text{تناظر}]{} \{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

خط L از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}} \{L: ax+by+c=0 | (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$

منحنی (C) از صفحه‌ی E $\xleftrightarrow{\text{تناظر}} \{y=f(x)|(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}$

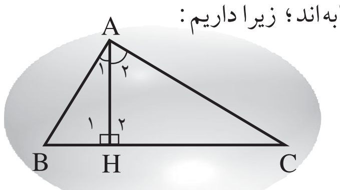
نکته‌ی ۱. به‌جای دستگاه مختصات دکارتی در صفحه، می‌توان از دستگاه مختصات قطبی در صفحه و یا هر دستگاه مختصات تعریف‌شده‌ی دیگری استفاده کرد.

نکته‌ی ۲. چگونگی نصب دستگاه مختصات در صفحه، برای ساده‌تر شدن و یا طولانی‌تر شدن محاسبه‌ها، از اهمیت زیادی برخوردار است؛ یعنی ما می‌توانیم با انتخاب دستگاه مختصات در صفحه، به‌نحوی مناسب، محاسبه‌ها را به حداقل برسانیم.

اکنون به چند مثال که با استفاده از دو رویکرد هندسی و جبری حل شده‌اند، توجه کنید.

مثال ۱. قضیه: ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجادشده روی وتر است.

اثبات با رویکرد هندسی: مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم (شکل ۱). دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH به دلیل برابری زاویه‌های متناظرشان، متشابه‌اند؛ زیرا داریم:



(شکل ۱)

$$\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \quad \text{و} \quad \hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ \qquad (1)$$

$$\hat{A}_1+\hat{B}=90^\circ \qquad (2)$$

$(1),(2) \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}$

از متشابه بودن این دو مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\frac{AH}{BH}=\frac{CH}{AH}\Rightarrow AH^2 = BH.CH$$

و این، حکم مسئله است.

اثبات با رویکرد جبری: مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. H را مبدأ مختصات، محور xها را منطبق بر BC و محور yها را منطبق بر AH اختیار می‌کنیم. اگر $AH = h$ ، $BH = d$ و $CH = e$ فرض شود، خواهیم داشت:

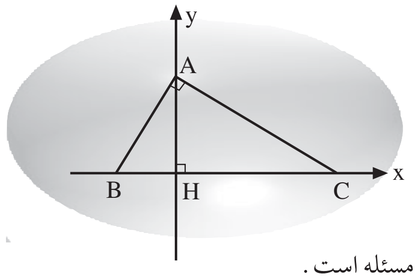
$A=(0,h)$ و $B=(-d,0)$ و $C=(e,0)$ $\qquad AB\perp AC$

$$m_{AB}=\frac{0-h}{-d-0}=\frac{h}{d} \quad \text{و} \quad m_{AC}=\frac{0-h}{e-0}=-\frac{h}{d}$$

$$m_{AB}.m_{AC}=-1\Rightarrow \frac{h}{d}\times\frac{-h}{e}=-1$$

$$\Rightarrow h^2 = de \Rightarrow AH^2 = BH.CH$$

(شکل ۲)

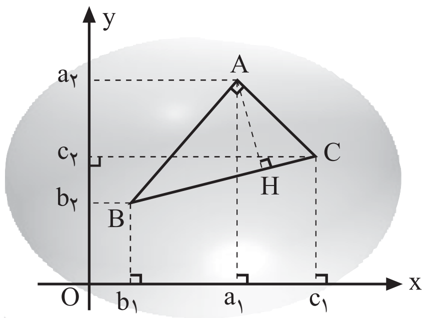


و این حکم مسئله است.

توجه کنید:

اگر دستگاه محورهای مختصات را به طور دل‌خواه در نظر بگیریم (شکل ۳)، رأس‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ از این قرار خواهد بود: $A=(a_1,a_2)$ ، $B=(b_1,b_2)$ و $C=(c_1,c_2)$.

(شکل ۳)



ارتفاع وارد بر وتر، یعنی AH را رسم می‌کنیم. اکنون برای اثبات رابطه‌ی $AH^2 = HB.HC$ ، لازم است طول پاره‌خط‌های AH، BH و CH را برحسب مختصات رأس‌های مثلث، یعنی برحسب مختصات نقطه‌های A، B و C به‌دست آوریم و در این رابطه قرار دهیم و ثابت کنیم که این رابطه به ازای مقدارهای قرار داده شده به جای AH، BH و CH همواره برقرار است.

اما نخست لازم است مختصات نقطه‌ی H، پای ارتفاع AH را برحسب مختصات رأس‌های A، B و C محاسبه کنیم. برای این کار باید معادله‌ی خط AH و معادله‌ی خط BC را به‌دست آوریم و آن‌گاه، مختصات نقطه‌ی برخورد آن‌ها را تعیین کنیم. داریم:

$$B\left|\begin{matrix}b_1\\ b_2\end{matrix}\right. \quad C\left|\begin{matrix}c_1\\ c_2\end{matrix}\right. \Rightarrow BC: y-b_2=\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}(x-b_1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}x-b_1\times\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+b_2$$

$$m/_{BC}=\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}, AH\perp BC\Rightarrow m/_{AH}=-\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}$$

$$\Rightarrow AH: y-a_2=-\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}(x-a_1)$$

معادله‌ی ارتفاع AH، $\Rightarrow y=-\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}x+a_1\times\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}+a_2$

$$\begin{cases} BC: & y=\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}x-b_1\times\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+b_2 \\ AH: & y=-\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}x+a_1\times\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}+a_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}x-b_1\times\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+b_2=-\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}x+a_1\times\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}+a_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}\right)x=a_1\times\frac{c_1-b_1}{c_2-b_2}+b_1\times\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+a_2-b_2$$

$$\frac{(c_2-b_2)^2+(c_1-b_1)^2}{(c_1-b_1)(c_2-b_2)}x=\frac{a_1(c_1-b_1)^2+b_1(c_2-b_2)^2}{(c_2-b_2)\times(c_1-b_1)}+a_2-b_2$$

$$\Rightarrow x=\frac{a_1(c_1-b_1)^2+b_1(c_2-b_2)^2+(a_2-b_2)(c_1-b_1)(c_2-b_2)}{(c_2-b_2)^2+(c_1-b_1)^2}=\alpha$$

طول نقطه‌ی H را α می‌گیریم. برای محاسبه‌ی عرض نقطه‌ی H داریم:

$$\Rightarrow y=\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}\times\alpha-b_1\times\frac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+b_2$$

$$\Rightarrow H\left|\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}\alpha-b_1\times\dfrac{c_2-b_2}{c_1-b_1}+b_2=\beta \end{array}\right.$$

از آن خواهیم داشت:

$$AH=\sqrt{(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2},\ BH=\sqrt{(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)^2}$$

$$CH=\sqrt{(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2}$$

$$AH^2=BH.CH$$

$$\Rightarrow(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2=\sqrt{(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)^2}$$
$$\times\sqrt{(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2}$$

$$\Rightarrow\left[(\alpha-a_1)^2+(\beta-a_2)^2\right]^2=\left[(\alpha-b_1)^2+(\beta-b_2)\right]$$
$$\times\left[(\alpha-c_1)^2+(\beta-c_2)^2\right]$$

با قرار دادن مقدار به جای α و β برحسب (a_1,a_2)، (b_1,b_2) و (c_1,c_2)، دو طرف این رابطه با هم برابر خواهند شد و این مطلب درستی رابطه‌ی $AH^2=BH.CH$ را نشان می‌دهد.

می‌بینید که با انتخاب دستگاه محورهای مختصات به این صورت، چه‌قدر محاسبه‌ها پیچیده و مشکل می‌شود. بنابراین اهمیت انتخاب مناسب دستگاه محورهای مختصات هرچه بیشتر نمایان می‌گردد.

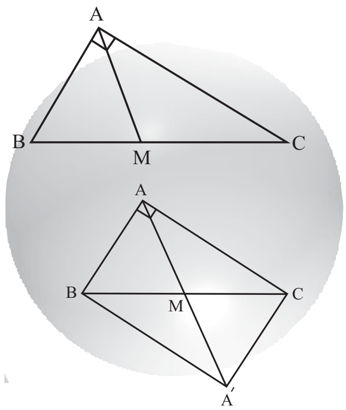
اینک به مثال‌های دیگری از حل یک مسئله با دو رویکرد هندسی و جبری توجه کنید.

مثال ۱. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است.

اثبات

الف) روش هندسی

راه اول:



(شکل ۴)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $AM=\frac{BC}{2}$ است. برای اثبات، میانه‌ی AM را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی A' امتداد می‌دهیم؛ یعنی $AM=MA'$. سپس از A' به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند ($AM=MA'$ و $BM=MC$).

از طرف دیگر، زاویه‌ی A از این متوازی‌الاضلاع 90° است، پس این متوازی‌الاضلاع مستطیل است. اما می‌دانیم که قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند، بنابراین: $AA'=2AM=BC$ و از آن‌جا: $AM=\frac{BC}{2}$. پس حکم مسئله ثابت شد.

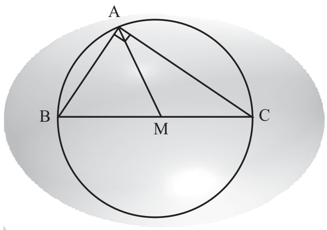
نکته: در این اثبات از قضیه‌های زیر استفاده شده است:

۱. اگر قطرهای یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲. متوازی‌الاضلاعی که یک زاویه‌ی 90° داشته باشد، مستطیل است.

۳. قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند.

راه دوم:



(شکل ۵)

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم: $AM=\frac{BC}{2}$.

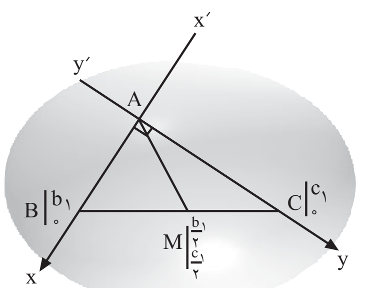
برای اثبات، دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره از رأس A می‌گذرد، زیرا کمان درخور زاویه‌ی 90° روبه‌رو به یک پاره‌خط، دایره‌ای است که به قطر آن پاره‌خط رسم می‌شود. پس AM مساوی شعاع این دایره است؛ یعنی داریم:

$$AM=MB=MC\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}$$

پس حکم مسئله ثابت شد.

ب) راه حل جبری

مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم: $AM=\frac{BC}{2}$.



(شکل ۶)

دستگاه محورهای مختصات قائم را چنان اختیار می‌کنیم کـه A مبدأ مختصات، AB روی محور xها و AC روی محور yها باشد (شکل ۶). در این صورت، با فرض $AB = b_1$ و $AC = c_1$ خواهیم داشت:

$$A = (0,0), B = (b_1, 0), C = (0, c_1)$$

$$BC \text{ وسط } M \left| \begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{b_1 + 0}{2} = \dfrac{b_1}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{0 + c_1}{2} = \dfrac{c_1}{2} \end{array} \right.$$

از آن‌جا:

$$BC = \sqrt{(0 - b_1)^2 + (c_1 - 0)^2} = \sqrt{b_1^2 + c_1^2} \qquad (1)$$

$$AM = \sqrt{(\frac{b_1}{2} - 0)^2 + (\frac{c_1}{2} - 0)^2} = \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + \frac{c_1^2}{4}}$$

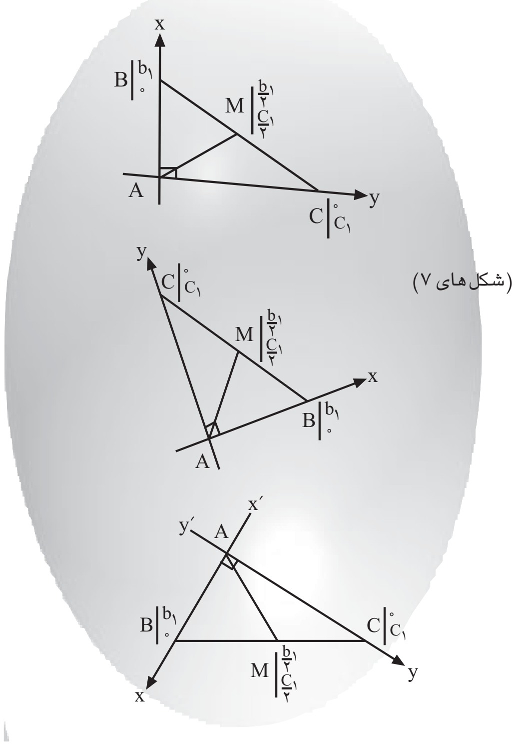
$$= \sqrt{\frac{b_1^2 + c_1^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 + c_1^2} \qquad (2)$$

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

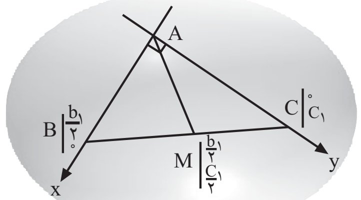
$$AM = \frac{1}{2} BC$$

و حکم مسئله ثابت شد.

نکته‌ی ۱. راستـای مـحورهـای Ax و Ay در ایـن دستـگـاه مختصات قائم و حالت این دستگاه مختصات قائم، کمی غیرمعمول به نظر می‌رسد. زیرا به‌طور معمول محور xها حالت افقی و محور yها حالت عمودی دارند. باید توجه داشته باشیم که این مطلب هیچ اشکالی ندارد، زیرا مـحورهـای Ax و Ay از دستگاه مـحورهـای مختصات قائم xAy هر حالتی می‌توانند داشته باشند؛ حالت افقی، حالت عمودی و یا حالت مایل، مانند شکل‌های ۷ و شکل ۸:

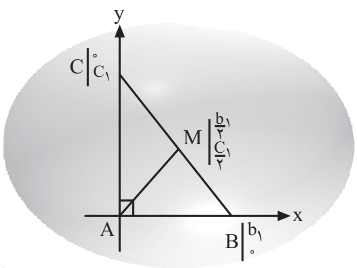


(شکل‌های ۷)



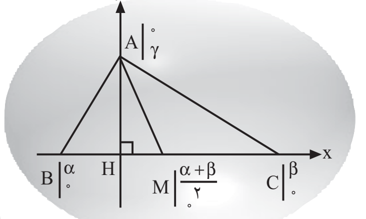
(شکل ۸)

در واقع، علت به‌وجود آمدن این حالت برای دستگاه مختصات xAy آن است که ما مثلث قـائم‌الـزاویـه‌ی $ABC(\hat{A} = 90°)$ را به صورت شکل روبه‌رو در نظر گرفتیم. حال اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A} = 90°)$ را به صورت شکـل ۹ در نظر بگیریم، دستـگـاه محورهای مختصات قائم xAy، دارای حالت معمول خود خواهد بود. یعنی محور Ax حالت افقی و محور Ay حالت عمودی خواهد داشت. اما همان‌طوری که قبلاً هم گفتیم، هیچ ضرورتـی وجـود ندارد که دستگاه محورهای مختصات قائم xAy، حالت معمول خود را داشته باشد.



(شکل ۹)

نکته‌ی ۲. در همین مسئله، برای حالتی که وتر BC حالت افقی دارد، می‌توانیـم BC را روی محور xها و AH را روی محـور yها در نظر بگیریم؛ یعنی نقطه‌ی H پای ارتفاع AH را مبدأ مختصات بگیریم. در این صورت، دستگاه محورهای مختصات xHy، حالت معمول خود را خواهد داشت و با فرض $B = (\alpha, 0)$، $C = (\beta, 0)$ و $A = (0, \gamma)$، نـقـطـه‌ی M وسـط وتـر BC بـه مـخـتـصـات $M = (\frac{\alpha + \beta}{2}, 0)$ خواهد بود و با محاسبه‌ی طول پاره‌خط‌های AM و BC برحـسـب α، β و γ، رابـطـه‌ی $AM = \frac{1}{2} BC$ ثـابـت می‌شود. بدیهی است که محاسبه در این دستگاه مختصات، قدری مفصل‌تر از حالت قبلی است.



(شکل ۱۰)

زیرنویس

1. Algebra 2. René Descartes 3. Pierre Feremat