$\Rightarrow ۲a = -۸ \Rightarrow \boxed{a = -۴}$

$۲b = ۱۴ \Rightarrow \boxed{a = ۷}$

مثال ۸. اگر $x = \sqrt{۲}$ یکی از صفرهای تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^۳ - (۴ + \sqrt{۲})x^۲ + (۳ + ۴\sqrt{۲})x - ۳\sqrt{۲}$ باشد، صفرهای دیگر تابع را بیابید.

حل: باید $f(x)$ را بر $(x - \sqrt{۲})$ تقسیم کنیم و سپس خارج قسمت را مساوی صفر قرار دهیم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳ - ۴x^۲ - \sqrt{۲}x^۲ + ۳x + ۴\sqrt{۲}x - ۳\sqrt{۲} & x - \sqrt{۲} \\ \cline{2-2} & x^۲ - ۴x + ۳ \end{array}$$

خارج قسمت $= ۰ \Rightarrow x^۲ - ۴x + ۳ = ۰$

مجموع ضرایب صفر است. $\Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \dfrac{c}{a} = ۳ \end{cases}$

پس $x = ۱$ و $x = ۳$ صفرهای دیگر تابع هستند.

آزمون ۱. اگر $f(۲) = f(-۲) = ۵$، آن‌گاه کدام یک از عبارت‌های زیر بر $(x^۲ - ۴)$ بخش‌پذیر است؟

الف) $f(x) - ۴$ ب) $f(x) - ۵$

ج) $f(x) - ۲$ د) $f(x) + ۲$

حل: گزینه‌ی ب. زیرا عبارتی بر $(x^۲ - ۴)$ بخش‌پذیر است که به‌ازای $x = ۲$ و $x = -۲$ برابر صفر شود. پس گزینه‌ی ب درست است.

آزمون ۲. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x - ۲)$ مساوی ۸ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^۲ - ۷)$ بر $(x + ۳)$ کدام است؟

الف) ۸ ب) ۷

ج) ۶ د) ۵

حل: گزینه‌ی الف. داریم:

$f(۲) = ۸$

$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow f(۹ - ۷) = f(۲) = ۸$

آزمون ۳. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x^۲ - ۸)$ صفر باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x^۳)$ بر $x^۴ + ۲x^۲ + ۴$ کدام است؟

الف) صفر ب) x

ج) $x - ۱$ د) $۲x$

حل: گزینه‌ی الف.

$f(x) = (x^۲ - ۸)Q(x)$

$x \xrightarrow{\text{تبدیل}} x^۳ \Rightarrow f(x^۳) = (x^۶ - ۸)Q(x^۳)$

$\Rightarrow f(x^۳) = (x^۲ - ۲)(x^۴ + ۲x^۲ + ۴)Q(x^۳) \Rightarrow R_{\text{جدید}} = ۰$

تفریح اندیشه

رحیم خیرالله‌زاده
دبیر ریاضی ناحیه‌ی ۲ شهرری

اثبات اصل لانه کبوتری در حالت کلی

صورت قضیه: اگر n کبوتر در k لانه قرار گیرند، به‌طوری که هر لانه گنجایش n کبوتر داشته باشد، آن‌گاه لانه‌ای یافت می‌شود که حداقل دارای $\left[\dfrac{n-۱}{k}\right]+۱$ کبوتر باشد.

اثبات: فرض می‌کنیم تعداد کبوترها در لانه‌ی iام برابر x_i باشد که در آن: $۱ \le i \le k$ و $۰ \le x_i \le n$. در این صورت، حکم مسئله معادل این خواهد بود که ثابت کنیم:

$$\exists i: x_i \ge \left[\frac{n-۱}{k}\right]+۱$$

برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد. در این صورت در تمام لانه‌ها، تعداد کبوترها کمتر از $\left[\dfrac{n-۱}{k}\right]+۱$ خواهد بود؛ یعنی:

$$\forall i: x_i < \left[\frac{n-۱}{k}\right]+۱ \qquad \text{(فرض خلف)}$$

حال نشان می‌دهیم که به تناقض می‌رسیم:

می‌دانیم $([x] \le x < [x]+۱)$

$$n = x_۱ + x_۲ + \ldots + x_k \le k\left[\frac{n-۱}{k}\right] \le k\left[\frac{n-۱}{k}\right] \le n-۱$$

هر x_i از ماکزیمم مقدار x_iها، یعنی: $\left[\dfrac{n-۱}{k}\right]$ کوچک‌تر یا با آن‌ها مساوی است.

به سادگی نتیجه می‌شود: $n \le n-۱$ که یک تناقض آشکار است.

بنابراین فرض خلف غلط است، یعنی حکم قضیه درست است و اثبات کامل می‌شود.