ب خ ش پ ذ ی ر ی

اشاره
در این مقاله به بررسی بخش‌پذیری عبارت $P(x)$ بر عبارت $Q(x)$ خواهیم پرداخت، همچنین روش‌هایی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم عبارت جبری $P(x)$ بر عبارت جبری $Q(x)$ را در پی می‌آوریم.

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم ریاضی

● احمد قندهاری

الف) شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشد، آن است که: $P(a)=0$ و $P(a)$ را باقی‌مانده‌ی تقسیم گویند.

مثال ۱. اگر عبارت $P(x)=x^3-2ax+8$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار عددی a را بیابید.

حل: باید $P(2)=0$

$$P(2)=(2)^3-2a(2)+8=0$$

$$\Rightarrow 8-4a+8=0 \Rightarrow 4a=16 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

ب) شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش‌پذیر باشد، این است که:

$$\begin{cases} P(a)=0 \\ P(b)=0 \end{cases}$$

تعمیم: شرط لازم و کافی برای این‌که عبارت $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-k)$ بخش‌پذیر باشد این است که:

$$\begin{cases} P(a)=0 \\ P(b)=0 \\ P(c)=0 \\ \vdots \\ P(k)=0 \end{cases}$$

مثال ۲. a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x)=ax^4+bx^3+4x-8$ بر (x^2-4) بخش‌پذیر باشد.

حل: روش اول

برای آن‌که $P(x)$ بر $x^2-4=(x-2)(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، باید: $\begin{cases} P(2)=0 \\ P(-2)=0 \end{cases}$؛ پس:

$$\begin{cases} P(2)=a(2)^4+b(2)^3+4(2)-8=0 \\ P(-2)=a(-2)^4+b(-2)^3+4(-2)-8=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a+8b+8-8=0 \\ 16a-8b-8-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a+8b=0 \\ 16a-8b=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 32a=16 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$16a+8b=0 \Rightarrow 16(\frac{1}{2})+8b=0$$

$$\Rightarrow 8+8b=0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

روش دوم (خیلی مهم است)

می‌توانیم بنویسیم $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ و در عبارت $P(x)$، به جای هر x^2، عدد ۴ را قرار دهیم. عبارت حاصل را متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$P(x)=a(x^2)^2+bx(x^2)+4x-8$$

$$x^2=4$$

$$R=a(4)^2+bx(4)+4x-8=16a+4bx+4x-8$$

$R=(۴b+۴)x+(۱۶a-۸)\equiv ۰$

$$\begin{cases}۴b+۴=۰\Rightarrow \boxed{b=-۱}\\ ۱۶a-۸=۰\Rightarrow \boxed{b=\frac{۱}{۲}}\end{cases}$$

تذکر: وقتی عبارتی از هر درجه متحد با صفر باشد، باید ضریب‌های همه‌ی جملات را مساوی صفر قرار دهیم. هم‌چنین عدد ثابت را هم مساوی صفر قرار دهیم.

مثال ۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)=x^{۱۶}+x^{۹}-x^{۴}+۱$ را بر $(x^{۳}+۱)$ بیابید.

حل: به روش دوم

$x^{۳}+۱=۰\Rightarrow x^{۳}=-۱$

$P(x)=x(x^{۳})^{۵}+(x^{۳})^{۳}-x(x^{۳})+۱$

$R=x(-۱)^{۵}+(-۱)^{۳}-x(-۱)+۱$

$R=-x-۱+x+۱\Rightarrow R=۰$

مثال ۴. a و b را چنان بیابید که عبارت $P(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+۴x-۳$ بر $(x^{۲}+۲)$ بخش‌پذیر باشد.

حل: ناچاریم این مسأله را به روش دوم حل کنیم، چون $(x^{۲}+۲)$ تجزیه نمی‌شود.

$x^{۲}+۲=۰\Rightarrow x^{۲}=-۲$

ممکن است سؤال کنید، آیا ممکن است $x^{۲}$ برابر ۲- شود؟

در پاسخ باید عرض کنم: بله. زیرا در ریاضیات مجموعه‌ای وجود دارد به نام مجموعه‌ی اعداد مختلط که در آن $x^{۲}$ می‌تواند مساوی ۲- باشد.

$P(x)=ax(x^{۲})+b(x^{۲})+۴x-۳$ و $x^{۲}=-۲$

$R=ax(-۲)+b(-۲)+۴x-۳$

$R=-۲ax-۲b+۴x-۳\equiv ۰$

$R=(۴-۲a)x-(۲b+۳)\equiv ۰$

$\Rightarrow ۴-۲a=۰\Rightarrow \boxed{a=۲}$

$۲b+۳=۰\Rightarrow \boxed{b=-\frac{۳}{۲}}$

مثال ۵. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $(ax^{۸}+bx^{۴}+۱)$ بر $(x^{۴}+۱)$ عدد ۱ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $(x^{۲}+ax+b)$ بر $(x+۲)$ را بیابید.

حل: به روش دوم

$x^{۴}+۱=۰\Rightarrow x^{۴}=-۱$

$ax^{۸}+bx^{۴}+۱=a(x^{۴})^{۲}+b(x^{۴})+۱$ و $R_{۱}=۱$

$R_{۱}=a(-۱)^{۲}+b(-۱)+۱=۱$

$\Rightarrow a-b+۱=۱\Rightarrow a-b=۰\Rightarrow \boxed{a=b}$

تعیین باقی‌مانده‌ی قسمت دوم:

$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲$

$x^{۲}+ax+۲b$

$R_{۲}=(-۲)^{۲}+a(-۲)+۲b=۴-۲a+۲b$

$a=b\Rightarrow \boxed{R_{۲}=۴}$

ج) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)$ برابر $R_{۱}$، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-b)$ برابر $R_{۲}$، و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ برابر $mx+n$ باشد، آن‌گاه m و n از دستگاه $\begin{cases}m(a)+n=R_{۱}\\ m(b)+n=R_{۲}\end{cases}$ به‌دست می‌آید.

اثبات: فرض می‌کنیم خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$، $Q(x)$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم $mx+n$ باشد. می‌توان نوشت:

$$P(x)=(x-a)(x-b).Q(x)+mx+n \qquad (I)$$

در ضمن داریم: $P(a)=R_{۱}$ و $P(b)=R_{۲}$

در رابطه‌ی (I) به جای x، یک بار a و یک بار b را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{cases}P(a)=(۰)(x-b)\ \ Q(a)+m(a)+\pi\\ P(b)=(x-a)(۰)\ \ Q(b)+m(b)+\pi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}R_{۱}=m(a)+n\\ R_{۲}=m(b)+n\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}m(a)+n=R_{۱}\\ m(b)+n=R_{۲}\end{cases}$$

مثال ۶. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-۱)$ برابر ۷ و باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-۲)$ برابر ۳ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ را بر $(x-a)(x-b)$ بیابید.

حل: فرض می‌کنیم باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-۱)(x-۲)$ برابر $mx+n$ باشد. بنابه درس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}m(a)+n=R_{۱}\\ m(b)+n=R_{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m(۱)+n=۷\\ m(۲)+n=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-m-n=-۷\\ ۲m+n=۳\end{cases}$$

$\Rightarrow m=-۴, m+n=۷\Rightarrow -۴+n=۷\Rightarrow n=۱۱$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $(x-۱)(x-۲)$، $(-۴x+۱۱)$ است.

مثال ۷. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت‌های $x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}-۴$ و $x^{۲}-۸x+۱۲$ بر $(x^{۲}-۲)$ یکی باشند، a و b را بیابید.

$x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}-۴=(x^{۲})^{۲}+ax(x^{۲})+bx^{۲}-۴$

الف) $x^{۲}-۲=۰\Rightarrow x^{۲}=۲$

$R_{۱}=(۲)^{۲}+ax(۲)+b(۲)-۴$

$R_{۱}=۴+۲ax+۲b-۴\Rightarrow R_{۱}=۲ax+۲b$

ب) $x^{۲}-۸x+۱۲ \quad x^{۲}=۲$

$R_{۲}=۲-۸x+۱۲\Rightarrow R_{۲}=-۸x+۱۴$

$R_{۱}\equiv R_{۲}\Rightarrow ۲ax+۲b\equiv -۸x+۱۴$