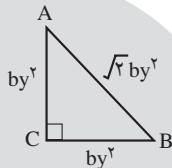
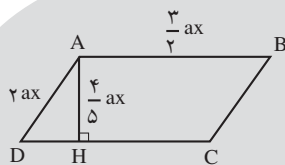


مسائل برای حل

ریاضیات ۱

میر شهرام صدر



۸. اگر به ازای هر x برابری زیر برقرار باشد، مقدار $a+b$ را پیدا کنید.

$$x^2 - x^2 - 4x + 5 = (x-1)^2 + a(x-1)^2 + b(x-1) + 1$$
۹. اگر $a+b-c=1$ آن گاه حاصل $a^2 + b^2 - c^2 - 1$ را بیابید.
۱۰. اگر $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{v}$ آن گاه مقدار $\frac{x^2}{x^2+x+1}$ را بیابید.
۱۱. عبارت های زیر را تجزیه کنید.
 الف) $x^2 - 2xy - 3y^2 - x + 7y - 2$
 ب) $x^2 + 4$
۱۲. تساوی $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{8x+11}{(x-1)(x-2)}$
۱۳. به ازای تمام x برقرار است، حاصل $a \times b$ را بیابید.

۱. مجموع سه عدد فرد طبیعی متوالی برابر با ۳۱۵ است، آن عددها را بیابید.
۲. اگر $M = \{x \in \mathbb{N} | x < 10\}$ مجموعه مرجع و $A = \{x \in M | x \text{ عدد اول است}\}$ و $B = \{x \in M | x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ $C = \{x \in M\}$ در این صورت:
 الف) آیا مجموعه های A' و $(B \cap C)$ جدا از هم هستند.
 ب) نشان دهید دو مجموعه $(A \cap C)'$ و $(A' \cup C')$ برابرند.
۳. فرض کنید $A_n = \{3n+2, 3n+1\}$ مطلوب است محاسبه ی $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$.
- راهنمایی: $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
۴. اگر عدد $2^x \times 3^y$ مجذور کامل باشد، به ازای کدام مقادیر k عدد $2^{(x+2)} \times 3^{(2y+k)}$ نیز مجذور کامل است؟ چرا؟
۵. مقدار x را از برابری زیر به دست آورید:

$$\frac{3^{2x} + 3^{2x-1}}{2 \times 8^x + 8 \times 2^{3x}} = \frac{3}{2^0}$$
۶. به ازای کدام مقدار α کسر $\frac{5}{5a+1}$ مولد کسر 0.45 است؟
۷. محیط و مساحت هر یک از شکل های زیر را بیابید.



۵. نمودار تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ -x & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$ را رسم کنید و از روی این نمودار، یک به یک و پوشایی f را بررسی کنید. هم چنین، مقدار عددی $f(f(f(-2)))$ را به دست آورید.
۶. نمودار تابع با ضابطه ی $y = \left| 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \right|$ را رسم کنید.
۷. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس 2×2 X را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$A^2 - A^1 = 5AX$$

۸. مقدار x را از معادله ی زیر به دست آورید:

$$\log_4^x + \log_7^x = \log_8^x + 1$$

۱. ریشه های حقیقی معادله های زیر را به دست آورید:
 الف) $\frac{x-3}{x-2} + \frac{x-3}{x-1} = \frac{2x-3}{x+2}$
 ب) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{2x-1}$
۲. مجموعه جواب نامعادله ی زیر را به دست آورید:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{7}{x^3-4x} > \frac{2}{x^2-2x}$$
۳. حدود a را طوری بیابید که برای همه ی مقادیر x داشته باشیم:

$$(a-1)x^2 + ax + a > 0$$

۴. نمودار تابع f با ضابطه ی $f(x) = \frac{x-[x]}{[x]+1}$ را در بازه ی $[-2, 2]$ رسم کنید.

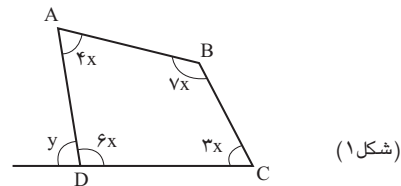
ریاضیات ۲

هوشنگ شرفی





۱. مقدار x و y را در شکل ۱ تعیین کنید (ABCD چهارضلعی محدب است).



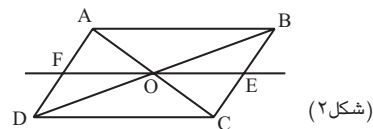
(شکل ۱)

۲. با استفاده از سه پاره خط داده شده، خمی رسم کنید که:

الف) ساده و بسته باشد. ب) ساده باشد، ولی بسته نباشد.

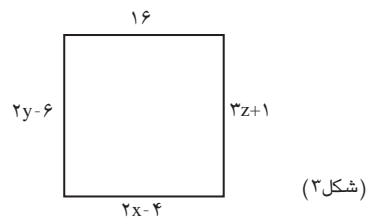
۳. تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب ۴۴ است. n را تعیین کنید.

۴. چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع و O نقطه ی برخورد قطرهای آن است (شکل ۲). از نقطه ی O خطی رسم کرده ایم که دو ضلع AD و BC را در نقطه های E و F قطع کرده است. ثابت کنید که OE=OF است.



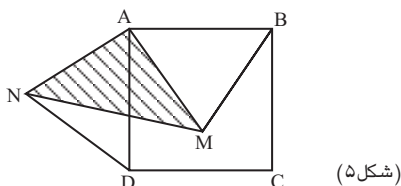
(شکل ۲)

۵. چهارضلعی ABCD مربع است (شکل ۳). اندازه های x ، y و z را تعیین کنید.



(شکل ۳)

۶. در متوازی الاضلاع ABC (شکل ۴)، نقطه ی E را روی خط AB) و



(شکل ۴)

۱۲. اگر $4(x+2y) = 3(2x-y)$ باشد، نسبت x به y را تعیین کنید.

۶. ثابت کنید: $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$

۷. مطلوب است محاسبه ی: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{3-x} - \sqrt{1-x}}$

۸. مقادیر a و b را چنان بیابید که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + 1 + \sqrt{x^2 + bx + 1}) = 2$$

۹. اگر خطوط $x=2$ و $x=4$ مجانب های قائم منحنی تابع

$$y = \frac{x^2 + a}{x^2 + (m+2n)x + m}$$

باشند، $m+n$ را به دست آورید.

۱۰. اگر $f(x) = [\sqrt{5x}]$ باشد، تعداد نقاط ناپوستگی این تابع را در بازه ی

$[-2, 2]$ به دست آورید.

۱. فرض کنید دامنه ی تابع f مجموعه ی $(0, 1]$ باشد. دامنه ی تابع

$$g(x) = f\left(\frac{[x]}{x}\right)$$

را بیابید.

۲. اگر داشته باشیم $af(x) + bf(-x) = cg(x)$ و $g(x)$ فرد باشد، در

این صورت تابع $f(x)$ زوج است یا فرد؟

۳. ثابت کنید تابع $f(x) = x + [x]$ معکوس پذیر است و معکوس آن را

به دست آورید.

۴. باقی مانده ی تقسیم $x^{29} + 2x^2 + x + 1$ بر $x^2 + x + 1$ را بیابید.

۵. اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی درجه دوم $x^2 + x - 1 = 0$ باشند، نشان

دهید:

$$5x_1^2 + 3x_2^2 = 8 - 5x_1 - 3x_2$$



جبر و احتمال

هوشنگ شرقی



۳. به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید:

$$(a^4 + b^4)(a^5 + b^5) \leq 2(a^9 + b^9) \quad (a \text{ و } b \text{ عددهای حقیقی و مثبت هستند}).$$

۴. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی با ۱۵ عضو باشد. ثابت کنید تفاضل دو عضو از اعضای S مضرب ۱۴ می‌باشد.

۵. x و y را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\{x + y, x - y, 3\} = \{2, 3\}$$

۶. مجموعه‌ی زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی نمایش دهید:

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}, \dots \right\}$$

۱. به کمک قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} \quad (\text{الف})$$

$$n \geq 2: \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24} \quad (\text{ب})$$

$$n^2 - n = 6r \quad (r \in \mathbb{Z}) \quad (\text{ج})$$

۲. اولاً با استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد گویا عددی

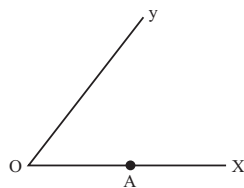
است گویا. ثانیاً نشان دهید حاصلضرب هر عدد گویا غیر صفر در هر عدد گنگ

عددی است گنگ. ثالثاً بررسی کنید که آیا حاصلضرب هر دو عدد گنگ، عددی

است گنگ یا خیر؟



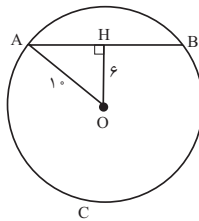
ضلع oy به فاصله‌ی معلوم l باشد.



(شکل ۳)

۱۰. دایره‌ی "C" به مرکز O داده شده است (شکل ۴). AB وتر دایره و OH

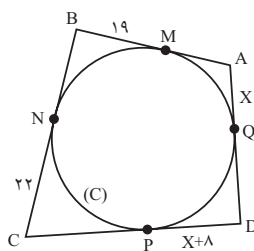
فاصله‌ی مرکز دایره از این وتر است. با توجه به شکل، اندازه‌ی وتر AB را به دست آورید.



(شکل ۴)

۱۱. چهار ضلعی $ABCD$ در نقطه‌های M, N, P, Q بر دایره‌ی C مماس

است (شکل ۵). اگر محیط این چهار ضلعی ۱۴۲ باشد، اندازه‌ی x را تعیین کنید.



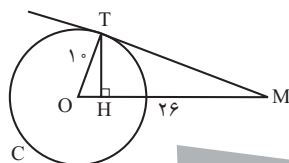
(شکل ۵)

۱۲. از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ی $(O, 10)$ که به فاصله‌ی ۲۶ از

مرکز دایره قرار دارد، مماس MT را بر دایره رسم کرده‌ایم (شکل ۶):

(الف) اندازه‌های مماس MT را تعیین کنید.

(ب) اگر H تصویر T روی OM باشد، اندازه‌ی پاره‌خط‌های OH و TH را به دست آورید.



(شکل ۶)

۱. با استفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای که تعداد قطرهای یک n ضلعی

محدب را بیان می‌کند، حدس بزنید و مراحل انجام کار را نیز شرح دهید.

۲. در مثلث ABC ، نقطه‌ی D ضلع AB و نقطه‌ی E ضلع AC را به نسبت تقسیم کرده‌اند. آیا همواره DE موازی BC است؟

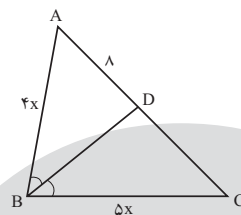
۳. در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB=AC$)، اندازه‌ی ارتفاع AH برابر ۱۲ سانتی متر و اندازه‌ی قاعده‌ی BC مساوی ۱۰ سانتی متر است. مجموع

فاصله‌های نقطه‌ی M واقع بر قاعده‌ی این مثلث از دو ساق آن را تعیین کنید.

۴. در شکل ۱، BD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی B از مثلث ABC است.

(الف) اندازه‌ی ضلع AC را تعیین کنید.

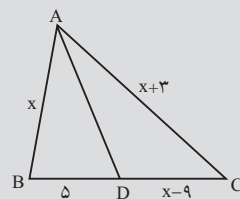
(ب) آیا اندازه‌ی ضلع‌های AB و BC را می‌توان تعیین کرد؟



(شکل ۱)

۵. در شکل ۲، AD نیم‌ساز زاویه‌ی درونی A از مثلث ABC است.

اندازه‌ی x و آن‌گاه اندازه‌ی محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



(شکل ۲)

۶. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که در هر مثلث، هر دو میانه متقاطع

هستند.

۷. یک ضلع از مثلثی ۶ سانتی متر و مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر که

عددهایی صحیح هستند، کوچک‌تر از ۱۰ و قدرمطلق تفاضل آن دو ضلع ۱

سانتی متر است. اندازه‌ی این دو ضلع را تعیین کنید.

۸. اندازه‌های سه میانه‌ی مثلثی (m_c, m_b, m_a) داده شده‌اند. مثلث را

رسم کنید.

۹. زاویه‌ی xoy و نقطه‌ی A روی ضلع ox داده شده است (شکل ۳).

نقطه‌ای از صفحه‌ی xoy را تعیین کنید که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R و از



هندسه‌ی ۲

محمد هاشم رستمی