

راهیان المپیاد ریاضی (۸)

• دکتر غلامرضا یاسی پور

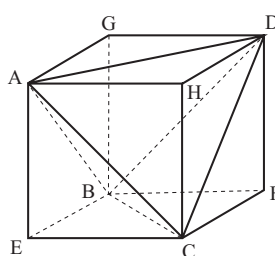
به عنوان پیامد این گزاره، راهی کوتاه برای محاسبه ی حجم چهاروجهی منتظمی وجود دارد که یالش برابر a است. در این مورد، تمام کاری که باید انجام دهیم این است که حجم های چهاروجهی ای را که می بریم، از حجم مکعبی با یال برابر $a\sqrt{2}/2$ کم کنیم. بنابراین، حجم چهاروجهی منتظم مورد بحث عبارت است از:

$$a^3\sqrt{2}/12 - 4 \times a^3\sqrt{2}/24 = a^3\sqrt{2}/12$$

با تغییر صورت شکل ۱ ملاحظه می کنیم، هر چهاروجهی را می توان به این طریق، در یک متوازی السطوح محاط کرد. در این بحث، به روابط بین ویژگی های چهاروجهی و متوازی السطوح وابسته به آن علاقه مندیم و در این مورد به بررسی دو حالت می پردازیم: یکی حالت چهاروجهی متعامد و دیگری حالت

۱. چهاروجهی های محاط در متوازی السطوح ها

در صفحه، مثلث متساوی الاضلاعی با رأس هایی به مختصات صحیح موجود نیست، در حالی که در فضا، چهاروجهی با رأس های $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ ، $(0,0,1)$ و $(1,1,1)$ منتظم است. بنابراین، همان گونه که در شکل ۱ می بینید، چهاروجهی منتظم محاط در مکعب واحد موجود است.



(شکل ۱)

چهاروجهی متساوی الساقین .

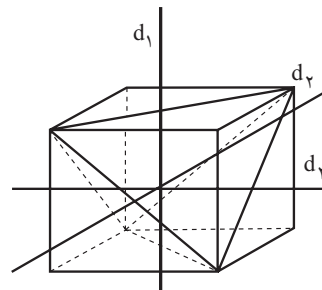
چهاروجهی را «متعامد»^۱ می نامیم، اگر یال های مقابل آن متعامد باشند. در نتیجه، چهاروجهی وقتی متعامد است که اگر و تنها اگر متوازی السطوح وابسته به آن «لوزی»^۲ باشد؛ یعنی؛ جميع وجه های آن لوزی باشد. در واقع، چهاروجهی متعامد است، اگر و تنها اگر دو قطر هر وجه متوازی السطوح مربوطه متعامد باشند. از طرف دیگر، متوازی الاضلاعی که قطرهای آن متعامد باشند، لوزی است و به این ترتیب نتیجه به دست می آید.

اما چهاروجهی متساوی الساقین^۳ نوعی چهاروجهی است که در آن یال های مقابل برابر باشند. این چهاروجهی را گاهی «متساوی الوجوه»^۴ نیز می نامند، زیرا وجه های آن، مثلث های هم نهشت اند. چهاروجهی متساوی الساقین است، اگر و تنها اگر قطرهای هر وجه متوازی السطوح وابسته به آن برابر باشند، و در نتیجه، اگر و تنها اگر متوازی السطوح وابسته، قائم^۵ باشد.

اکنون نشان می دهیم که چگونه ملاحظات فوق در حل مسئله ی زیر به کار می روند؛ مسئله ای که در سال ۱۹۸۴، در تست انتخابی رومانیایی مربوط به المپیاد ریاضی بالکان داده شده است.

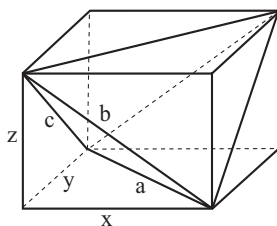
فرض می کنیم ABCD یک چهاروجهی و d_1 ، d_2 و d_3 به ترتیب، عمود مشترک AB و CD، AC و BD، و AD و BC باشند. ثابت کنید چهارضلعی متساوی الساقین است، اگر و تنها اگر d_1 ، d_2 و d_3 دو به دو متعامد باشند.

برای حل مسئله، توجه داریم که اگر چهاروجهی را چنان که در شکل ۲ می بینید، در یک متوازی السطوح محاط کنیم، آن گاه d_1 ، d_2 و d_3 به ترتیب، به قطرهای سه جفت وجه آن عمودند و در نتیجه بر خود این وجوه عمود می شوند. متوازی السطوح مورد بحث قائم است، اگر و تنها اگر هر دو وجه مشترک در یک یال آن متعامد باشند. از طرف دیگر، دو صفحه متعامدند، اگر و تنها اگر عمودهای وارد بر آن دو، متعامد باشند. در نتیجه، متوازی السطوح قائم است، اگر و تنها اگر d_1 ، d_2 و d_3 دو به دو متعامد باشند که به این ترتیب، ادعا به اثبات می رسد.



(شکل ۲)

شکل ۱



چهاروجهی های محاط در متوازی السطوح ها

حل

۲. شعاع کره ی محیطی چهاروجهی متساوی الساقین را بر حسب یال های آن بیان کنید.

۳. فرض می کنیم ABCD یک چهاروجهی و M، N، P، Q، R و S، به ترتیب، وسط های AB، AC، CD، AD، BC و BC باشند. ثابت کنید قطعه های MN، PQ و RS متقاطع اند.

۴. ثابت کنید، اگر دو جفت یال های یک چهاروجهی متعامد باشند، چهاروجهی متعامد است.

۵. ثابت کنید در متوازی السطوح لوزی $A_1B_1C_1D_1$ ، $A_2B_2C_2D_2$ ، عمود مشترک های جفت خطوط A_1C_1 و A_2C_2 ، B_1D_1 و B_2D_2 ، C_1D_1 و C_2D_2 ، A_1D_1 و A_2D_2 ، متقاطع اند. ۶. ثابت کنید در یک چهاروجهی متعامد، ارتفاعات متقاطع اند.

۷. فرض می کنیم ABCD یک چهاروجهی متعامد باشد، ثابت کنید:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

۸. حجم یک چهاروجهی متعامد را بر حسب یال های آن بیان کنید.

۹. ثابت کنید اگر جميع چهار وجه یک چهاروجهی سطحی یکسان داشته باشند، آن گاه چهاروجهی، متساوی الساقین است.

۱۰. در یک چهاروجهی، جميع ارتفاعات برابرند و یک رأس متعامداً بر محل تلاقی ارتفاعات وجه مقابل تصویر شده است. ثابت کنید چهاروجهی منظم است.

۱. در شکل ۱، چهاروجهی را در متوازی السطوحی محاط می کنیم. اگر x ، y و z یال های متوازی السطوح و a ، b و c یال های چهاروجهی باشند، از آن جا که متوازی السطوح قائم است، براساس قضیه ی فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 + z^2 = c^2$$

$$x^2 + z^2 = b^2$$

استدلالی مشابه نشان می دهد که AECF نیز لوزی است. به این ترتیب:

$$BH = BG = BE$$

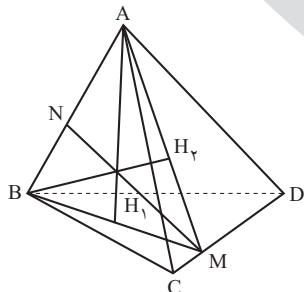
که نشان می دهد وجه BHCE نیز لوزی است و در نتیجه: $AD \perp BC$.

۵. این مسئله کاربردی از این قضیه است:

با مفروض بودن نقطه ی A و صفحه ای نا شامل A، فرض می کنیم L خطی در این صفحه، B تصویر A بر این صفحه و C نقطه ای در این صفحه باشد. BC بر L عمود است، اگر و تنها اگر AC بر L عمود باشد.

برای اثبات این نتیجه توجه داشته باشید که AB بر صفحه، و در نتیجه بر L عمود است. در این صورت، هریک از دو تعامد مستلزم این است که L بر صفحه ی ABC عمود باشد، و در نتیجه مستلزم تعامد دیگر است.

اکنون فرض می کنیم ABCD یک چهاروجهی باشد. اگر $AH_1 \perp (BCD)$ ، که در آن $H_1 \in (BCD)$ (شکل ۳ را ملاحظه کنید)، در این صورت، H_1 محل تلاقی ارتفاعات مثلث BCD است. در واقع، از آن جا که $AH_1 \perp (BCD)$ و $AB \perp CD$ ، آن گاه بنابر قضیه ی فوق، $BH_1 \perp CD$ و به همین ترتیب: $CH_1 \perp BD$ و $DH_1 \perp BC$.



شکل ۳

فرض می کنیم: $BH_1 \cap CD = \{M\}$ و $H_1 \in AM$ با $BH_1 \perp AM$. از آن جا که $CD \perp AB$ و $CD \perp AH_1$ داریم: $CD \perp (ABM)$ و در نتیجه: $CD \perp BH_1$. این مطلب نشان می دهد که $BH_1 \perp (ACD)$ و در نتیجه H_1 محل تلاقی ارتفاعات مثلث ACD است. بنابر نتیجه ای از این ساختار، AH_1 و BH_1 متقاطع می شوند و بنابر تقارن، اگر CH_1 و DH_1 ارتفاع های دیگر باشند، هر دو مورد با خطوط AH_1 ، BH_1 ، CH_1 و DH_1 تقاطع می کنند. از آن جا که هیچ سه مورد از این خط ها در یک صفحه قرار ندارند، نتیجه می گیریم که جميع آن ها در یک نقطه متقاطع می شوند. نقطه ی تقاطع آن ها را معمولاً نقطه ی ارتفاعی^۶ چهاروجهی می نامند.

۶. راه حل مسئله ی قبل را به خاطر می آوریم. اگر فرض کنیم N بر AB چنان باشد که $MN \perp AB$ ، آن گاه MN شامل نقطه ی ارتفاعی^۶ چهاروجهی و عمود مشترک خطوط AB و CD است. چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ متعامد است، در نتیجه عمود مشترک های

در نتیجه:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}; y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}; z = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

حجم متوازی السطوح xyz، و حجم چهاروجهی یک سوم آن و برابر است با:

$$\frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$$

(H. Steinhaus, one hundred problems in elementary mathematics, Dover Publ. Inc., New York, 1979.)

۲. در صورتی که توجه کنیم، کره ی محیطی چهاروجهی، کره ی محیطی متوازی السطوح قائمی نیز هست که در آن محاط شده است، پاسخ بلافاصله به دست می آید.

شعاع محیطی متوازی السطوح قائم، نصف قطر اصلی آن است. اگر a، b و c طول های یال های چهاروجهی باشند، آن گاه یال های ycx و z متوازی السطوح در روابط زیر صدق می کنند:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y^2 + z^2 = b^2$$

$$x^2 + z^2 = c^2$$

طول قطر متوازی السطوح عبارت است از:

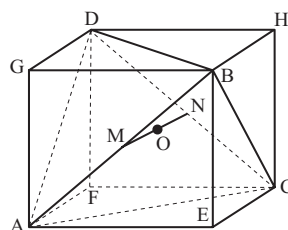
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

بنابراین شعاع کره ی محیطی برابر است با:

$$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)/8}$$

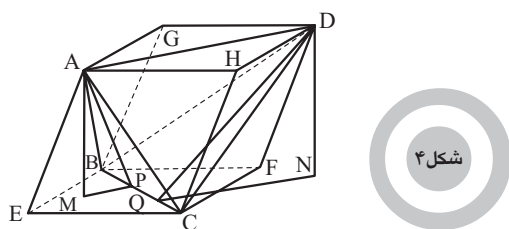
۳. چون در شکل ۲، چهاروجهی را در متوازی السطوح AECFGBHD محاط می کنیم، در این صورت M و N مراکز وجه های AEBG و CHDF هستند. بنابرین، O مرکز ثقل متوازی السطوح بر MN است. با تکرار این استدلال درمی یابیم که O در تقاطع MN، PQ و RS است. توجه داشته باشید که O مرکز ثقل ABCD نیز هست.

۴. چهاروجهی را در یک متوازی السطوح محاط می کنیم. از آن جا که یکی از قطر های وجه AEBG قطر AB و دیگری موازی CD است، نتیجه می گیریم که AEBG متوازی الاضلاعی با اقطار متعامد، و در نتیجه لوزی است.



شکل ۲

$NQ \perp BC$ و $P, Q \in BC$ (شکل ۴).



بنابر نتیجه‌ی مذکور در راه حل مسئله‌ی ۵، $AP \perp BC$ و $DQ \perp BC$ و از آن‌جا که مثلث‌های ABC و DBC دارای سطح یکسان‌اند، به دست می‌آوریم: $AP = DQ$. و این مستلزم آن است که مثلث‌های AMP و DNQ هم‌نهشت باشند. بنابراین $MP = NQ$.

به این ترتیب، M و N از BC به یک فاصله‌اند و از آن‌جا که A و D نیز به یک فاصله از GH قرار دارند، نتیجه می‌شود که BC تصویر GH روی صفحه‌ی "ECFB" است. در نتیجه صفحات "GBCH" و "ECFB" متعامدند.

این مطلب نشان می‌دهد که CH هم بر EC و هم بر CF عمود است. استدلالی مشابه، $CE \perp CF$ را به دست می‌دهد. به این ترتیب، متوازی‌السطوح $AHDGECFB$ قائم است و در نتیجه چهاروجهی مورد بحث متساوی‌الساقین.

۱۰. فرض می‌کنیم $ABCD$ چهاروجهی باشد و A در H ، نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی مثلث BCD تصویر شود. نیز فرض می‌کنیم، CM ارتفاع این مثلث باشد. از آن‌جا که بنابر قضیه‌ی مذکور در راه حل مسئله‌ی ۵، AH عمود بر صفحه‌ی "BCD" است و $CM \perp BD$ ، نتیجه می‌شود که: $AC \perp BD$.

به همین ترتیب، $AD \perp BC$ و $AB \perp CD$. بنابراین، چهاروجهی مورد بحث متعامد است و این مستلزم آن است که متوازی‌السطوح وابسته لوزی‌القاعده باشد.

از طرف دیگر، فرمول حجم و برابری ارتفاع‌ها مستلزم برابری سطوح چهاروجه است و مسئله‌ی ۹ مستلزم آن است که چهاروجهی مزبور متساوی‌الساقین باشد. به این ترتیب، متوازی‌السطوح وابسته، قائم است. اما متوازی‌السطوح قائم لوزی‌القاعده‌ی مورد بحث، مکعب، و چهاروجهی وابسته‌اش منتظم است (المپیاد ریاضی رومانی، ۱۹۷۵؛ طرح از: N. Popescu).

جفت‌های خطوط صورت مسئله، شامل نقطه‌ی ارتفاعیه‌ی چهاروجهی‌اند و در نتیجه متقاطع می‌شوند.

۷. اتحاد متوازی‌الاضلاع را به‌خاطر می‌آوریم که طبق آن، در متوازی‌الاضلاع $MNPQ$ ، چنین رابطه‌ای برقرار است:

$$MP^2 + NQ^2 = MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2$$

چهاروجهی را در متوازی‌السطوح لوزی‌القاعده‌ای با طول یال a محاط می‌کنیم. با نوشتن اتحاد متوازی‌الاضلاع در مورد هر وجه، به دست می‌آوریم:

$$AB^2 + CD^2 = 4a^2 = BC^2 + AD^2 = AD^2 + BC^2$$

و مسئله به این ترتیب حل می‌شود.

۸. فرض می‌کنیم، $ABCD$ چهاروجهی مفروض، محاط در متوازی‌السطوح لوزی‌القاعده‌ی $AHDGECFB$ باشد. حجم چهاروجهی، یک سوم حجم متوازی‌السطوح است. از طرف دیگر، حجم متوازی‌السطوح شش برابر حجم چهاروجهی $EABC$ است. بنابراین مورد اخیر را محاسبه می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$AB = a \text{ و } BC = b \text{ و } AC = c \text{ و } EH = d$$

همان‌گونه که در مسئله‌ی قبل ملاحظه می‌شود، این چهار یال به طور کامل دو یال باقی‌مانده را معین می‌کنند. سطح وجه ABC ، بنابر فرمول هرو^۹ برابر است با:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{که در آن: } p = (a+b+c)/2$$

از طرف دیگر، از آن‌جا که یال‌های EA ، EB و EC برابرند، رأس E در O ، مرکز محیطی وجه ABC تصویر می‌شود. برای محاسبه‌ی ارتفاع EO ، توجه داشته باشید، از آن‌جا که وجه $AECH$ لوزی است:

$$AE = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2}$$

و در مثلث ABC داریم:

$$AO = abc / (4S) = abc / (4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)})$$

قضیه‌ی فیثاغورس مستلزم این است که:

$$EO = \sqrt{EA^2 - AO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

در نتیجه، حجم چهاروجهی $ABCD$ عبارت است از:

$$\frac{2}{3}EO.S = \frac{1}{6}\sqrt{4(c^2 + d^2)p(p-a)(p-b)(p-c) - a^2b^2c^2}$$

۹. فرض می‌کنیم $ABCD$ مانند قبل، چهاروجهی محاط در متوازی‌السطوح $AHDGECFB$ باشد. نیز فرض می‌کنیم M و N تصاویر A و D بر صفحه‌ی "ECFB" باشند، و $MP \perp BC$

- | | |
|------------------------------|----------------|
| 1. orthogonal | 2. rhomboidal |
| 3. isosceles | 4. equifacial |
| 5. right | 6. orthocenter |
| 7. rhomboidal parallelepiped | 8. Hero |